ISAACI BARROW
Mathematicæ Professoris Lucasiani
LECTIONES
Habitæ in Scholis Publicis
Academiæ Cantabrigiensis:
An. Dom.
M. DC. LXIV.



LONDINI,
Typis *J. Playford*, pro *Georgio Wells*
in Cœmeterio D. *Pauli.* 1683.

ISAACI BARROW

Mathematicae Professoris Lucasiani

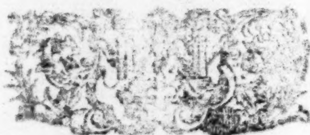
LECTIONES

Habitae in Scholis Publicis

Academiae Cantabrigiensis:

An. Dom.

M. DC. LXIV.



LONDINI,

Typis *J. Playford*, pro *Georgio Wells*

in Coemeterio D. *Pauli*. 1683.

MATHEMATICI PROFESSORIS LECTIONES,

PRO

Anno Millesimo Sexcentesimo Sexagesimo Quarto.

Ἀρκεῖ, εἰ τὰ μὲν οὐ χεῖρον. *Arist. Metaph.*

J. B.

ORATIO
PRÆFATORIA.

Mart. 14. 1664.

UT conquieverit paulò solennium negotiorum æstus, & restituta tantisper rebus vestris tranquillitas dandis accipiendisque novis animos apparaverit vobis, aures patefecerit; attendite sultis, Academici, insolitæ rei quiddam, & prodigii non absimile denarrare gestienti. Affulsit nuper: quidnam inquietis? an dirus cometes funestorum casuum prænuncius, cujusmodi plusculos indies, vel invito cælo, fanaticorum capitum distorta contuetur acies? imò novum, at beneficum sydus, vero pariter ac fausto jubare scintillans, quale nullum constat à multis annis supra Academicum horizontem emersisse; cujus ego nunc ut dimetiar magnitudinem, motus explicem, præsagiam eventus, haud vanus utique huc prodeo Astrologus. Vultis edisseram clarius?

rius? quàm iniquum sit in literas, erga literatos invidum, ingratúmque audiat hoc seculum, ignorare nemo potest, qui vel ad illarum calamitosam sortem obverterit oculos, aut ad crebras horum querelas non prorsus obsurduerit. Quò demiremini magis, qui tristes hâc tempestate camænas respiceret, istam infami seculo labem abstergeret, elanguentibus studiis vigorem inspiraret, obductam longâ desuetudine, nullisque jamdudum vestigiis signatam benefaciendi semitam retegeret, eximium tandem comparuisse Mecænatem; nedum titulo tenus, ut fit, sed ipsissimâ re Mecænatem; non qui nudam ostentârit gratiam. ast solidam operam impenderit literis; non ipsas benevolo tantùm affectu complexus, sed munificâ quoque manu sit prosecutus. Cujùs ego viri ut laudes efferam, ut virtutes deprædicem, utinam mihi congrua tantis meritis verba, par tali materiæ eloquium obtigisset, neque de adeò prælustri argumento tam mihi arduum esset dignè fari, quàm nefas est omninò tacere. Utcunque cùm publicæ gratitudinis intersit, meique præsertim id exigat officii privati ratio, etsi facultatem præstare non possum, voluntatem tamen ostendam.

dam, aliquo ſaltem, imperfecto licèt & inconcinno, elogio præclari Benefactoris memoriam cohoneſtandi. Fuit is (aſſurgite quotquot eſtis Academici, tantóque debitam nomini reverentiam exhibete) Henricus Lucas; Lucas, *inquam, Martiam ſimul virtutem effulminans, & Palladiam ſapientiam expirans nomen; belli togæque laudibus utramque paginam hiſtoriæ repleturum; futurúmque apud poſteros an heroïcæ fortitudinis neſcio vel divinæ munificentiæ exemplis celebratius. Henricus Lucas; vir à proſapiæ dignitate prolixè commendandus (utpote qui prænobiles familias proximâ ſanguinis agnatione contigerit) niſi quòd amplitudini generis potior animi magnificentia detraxerit, & virtutum excellentià natalium quaſi ſplendorem obumbrârit. Modicas illi facultates naſcendi ſors attribuit, quas etiam pupillo litigioſi fori ſubtraxit importunitas, juríſque injuria ſurripuit; proſperâ fati iniquitate, nè ſcilicet inconſultæ fortunæ potiùs quàm laudabili ſolertiæ ſua vel honeſtè vivendi copia, vel glorioſè benefaciendi facultas poſſet imputari. Etenim à parentibus tranſmiſſas poſſidere divitias puræ felicitatis eſt, acquirere*

ſibi perfectæ laudis; quæ aliunde quis acceperit aliis impertire, justæ reſtitutionis ſpeciem habet; ſuo autem labore parta comiter elargiri, titulum meritò præ ſe ferat liberalis beneficii: maximam indè partem gloriæ caſus decerpat, integrum hinc ſibi virtus adjudicat. Talis noſter, ſortis auctor propriæ, ſuæ virtutis hæres, privatæ ſoboles induſtriæ, ex anguſta re ad amplas opes eniſus, ab humili ſtatu in ſpectabilem gradum evectus eſt. Quo pacto ſciſcitemini, quibúſve fretus adminiculis? an rapinis graſſando, fovendo lites, merces commutando, illiberales quæſtus exercendo? nullâ harum, ſed innocentiſſimâ ratione, probatiſſimis artibus, quibúſque natura homines ad propulſanda vitæ incommoda ſanctiſſimis armis inſtruxit, elegantiâ ingenii, linguæ ſuadâ, morum probitate. Ampliſſimo nempe collegio Sancti Johannis (quod cùm innumeros addixerit Eccleſiæ, permultos accommodârit Reip. inſignes viros, nullum, opinor, Academiæ enutrivit utiliorem alumnum) huic inquam feraci ſeminario implantatus, adeò feliciter adolevit, ità bonis artibus ingenium excoluit, probis animum imbuit moribus; ut cùm nulli non aptus muneri,

quâvis

quâvis promotione dignus videretur, id saltem maturè assequutus est, ut in Illustrissimi Comitis Hollandiæ (viri præcipuâ apud serenissimum Regem gratiâ florentis, & Cancellarii vestri summis etiam proceribus invidendo tunc honore præfulgentis) familiam adscitus, secretioribus ejus consiliis & litteris (qui potissimus est & perquam honorificus apud Optimates clientelæ locus) admoveretur; quam adeò singulari dexteritate, sinceritate, diligentiâ spartam exornavit, ut neutiquam mirandum sit, dum patroni res procuraret optimè, suis ipsum non pessimè prospexisse, bonæque frugis aliquid è tam copiosâ messe proprium in horreum reportâsse. Sic amplificato per honestam solertiam censu, pari prudentiâ decrevit uti, nec egregii laboris fructum sibi passus est elabi turpiter, infeliciter abortire: non in splendidos illum luxus erogavit, nec in fœdas profudit voluptates; non (sicut plerisque nunc usu venit opulentis) otiosorum vernularum stipavit se frequenti satellitio, nec magnificos conviviorum apparatus adornavit; non popularem impendiosè captavit auram; nec politicis semetipsum factionibus immersit: at vitæ genus frugale, modestum, tranquil-

lum amplexatus, sapientiæ ac pietati vacans unicè, modici temporis erga se parsimoniam coluit, ut sempiternam versus alios liberalitatem exerceret. De prole suscipienda, vel stirpe sua propaganda parùm solicitus patrem se egenis præstitit, suis Musas penatibus ascripsit, universos sibi posteros velut adoptavit; neutiquam id sibi pensi datum arbitratus, ut unum aliquem efficeret segniter locupletem, sed ut plurimorum necessitati subveniret, omnium industriam compensaret; nec ut privatam domum adimpleret copiâ, sed ut totum genus humanum scientiâ collustraret. Quanquam haud videri debet vel familiæ suæ neglexisse decus, aut famæ sui nominis ullatenus offecisse, quibus adeo durabilia constituit monumenta, quarùmque memoriam immortalibus Musis commendavit. Nam accuratâ modò lance rem perpendamus, non aliâ quâcunque viâ generosæ propaginis gloria seipsam disseminet latiùs, aut radices suas altiùs infigat æternitati, quàm literarum sibi favorem demerendo; quibus ipsum scilicet tempus suarum rerum custodiam assignare, conscientiam solet accredere, quarúmque semper indefesso spiritu canora famæ buccina inflatur. Intereant oportet

tet literæ, lumen extinguatur omnis memoriæ, diffusissimâ barbarie rerum facies obruatur, quàm Lucasianum cesset inclarescere nomen, inque hoc perpetim illustri gloriæ theatro solenni cum laude personare. Sed neque justitiæ minus in hoc proposito, quam prudentiæ specimen elucescit. Aliquid à prosapia sortitus est lucis, plus in illam splendoris refudit; tenue patrimonium à majoribus accepit, larga cognatis munera redonavit; amicorum benevolentiæ fænus amplum retulit; neminem de se bene meritum non vicissim benefaciendo superavit. Quod si literarum præsertim auspiciis suprema cùm fortunæ suæ præsidia, tum animi ornamenta consecutus est; si Academiæ parenti vitæ melioris initium, magistræ virtutis quâ emicuit disciplinam, cultúmque quo excelluit ingenii, fautrici demùm eximium dignitatis suæ debuerit incrementum; quamobrem non meritissimo jure parem illis rependeret gratiam, mutuis hanc officiis devinciret? quid enim, Academiæ nomine semel atque iterum ad suprema Regni comitia destinari, senatoriâ purpurâ decoratum literati populi causam agere, tutelam suscipere, personam sustinere; vestrum, hoc est ipsissimum

mum sapientiæ, corpus repræsentare; vestro gravissimo judicio probari, deligi, claris competitoribus anteponi, num parvi pendendum decus est? imò quolibet pretio pluris æstimandum, nullis non fastuosis titulis præferendum. Atque utinam Academici, sic perpetuò cum rebus vestris comparatum esset, quos educatio sua in sublimiorem extulit gradum, quósque consimili benevolentiæ testimonio affecitis, ut ii pariter evadant erga vos animati; ut sæpiùs judicia vestra tam auspicatò collimentt, beneficia vestra tam rectè collocentur: non ità liberales scientiæ pabuli inopes, honoris exsortes marcescerent, nec dignis modò præmiis, at necessariis etiam subsidiis destituta studia languerent. Enimverò solus ille jam à plurimis annis ab injuria literas protexit, à contemptu asseruit, ab inopia liberavit, operâ suâ adjuvit, opibus adauxit scientias. Iniquis siquidem istis & infaustis temporibus, cùm proventibus Academicis avida barbaries inhiaret; onera cùm imponeret omnibus, & gravissima undicunque tributa corrogaret; causam ille vestram tutatus est acriter, immunitates vestras strenuè propugnavit; annisus est vehementer, & multum effe-

cit,

cit, quà consilio quà eloquio suo, nè toga sago fieret vectigalis, nè Martis furor Minervæ fundum depasceret, nè honestis artibus fovendis dicatæ opes ad sustentandam nefariam tyrannidem, ad improbos ausus promovendos perverterentur. Ità clypeum se vestrum tunc objecit importunæ nequitiæ, gladium posteà vobis adversus inscitiam accincturus; averruncavit à vobis exitiale damnum, mox insigne lucrum adjecturus. Quippe mortalis curriculi cùm extremam penè metam se attigisse præsentiret, ut beneficio saltem perduraret superstes, nec prodesse vobis cessaret, etiam cùm vivere desiisset, cœpit animo versare secum, & cum amicis consilium inire, quâ potissimùm ratione studiis vestris quàm optimè posset consulere; cúmque quâ parte debiles essetis maximè, idoneis illam præsidiis firmare, vulneribus vestris oportuna remedia applicare, defectus supplere, damna resarcire statuisset, omnia circumspectanti succurrit imprimìs dignissima beneficentiæ materia Mathematicæ disciplinæ; quas cùm insignis commendet utilitas ingenuæ delectationi adjuncta, cùm ipsarum peculiaris difficultas auxilii plurimum efflagitet, cùm ipsas veteres sapientiæ Magistri

giſtri præcipuâ curâ excoluerint, omnis ævi homines ingente plauſu exceperint, præſens autem ætas in extremis deliciis habeat, mirandum neſcio magìs an dolendum ſit, in hac omnium diſciplinarum fæcunda matre, omnium ſtudiorum benigna nutrice Academia nullum ferme hactenus illis conceſſum fuiſſe locum, nullum aſſignatum præmium, nullum patrocinium indultum. Tantum dedecus amoliri ſtudens, & quò jacentes ſcientias inſtauraret, adjutricem illis ſubminiſtravit manum, Profeſſione Mathematicâ ſuis auſpiciis inſtitutâ, ſuis opibus liberali ſtipendo dotatâ. Quinetiam cùm bibliothecæ veſtræ ſublati libri Lambethani acerbiſſimam plagam inflixiſſent, perſanavit illam, ſaltem valdè mitigavit ſubſtitutâ ſuâ, minùs lautâ quidem nec perindè magnificâ, ſed æquè lectâ, pariter pretioſâ ſupellectile librariâ, inſigni illo tam eruditionis ſuæ monumento, quàm adjumento veſtræ. Quæ benefacta cùm nullis amplificari verbis, nullis queant coloribus illuſtrari; idémque planè ſit illa ſimpliciter recenſere, ac fusè celebrare, vobis potiùs committam gratifico mentis ſenſu recolenda, quàm mihi deſumam rudi encomio temeranda. Adnotare ſaltem

liceat,

liceat, obiter atque strictim, quum (sicut assolet fieri quòd prætermissâ matre benigniùs tractentur filiæ) plures in singula collegia pronum affectum contestati sint, prægrandia dona contulerint, nullum hactenus universæ Academiæ tam officiosum filium, gratum alumnum, munificum patronum obvenisse; quorum tamen illud tanto angustioris animi, tanto exilioris est meriti, quanto publicus sol domesticæ lampadi prælucet, quantóque augustius est beneficum influxum ad omnes diffundere, quàm in paucos derivare. Itidem ut alii majora præstiterint, nostrum sua prudentiùs dispensâsse; siquidem opportunissimo tempore, cùm res vestra, diutiùs neglecta, conspicui favoris indigeret, & deplorata conditio literarum validam opem imploraret; ad usus summopere necessarios, quibúsque nescio turpiúsne fuerit an damnosius vos hactenus caruisse: alios denique beneficio plurimùm, neminem æquè de vobis exemplo meruisse; quando nimirum illi pro temporum ingenio, seculique sui moribus obtemperantes vigentibus gratiâ literis acclamârint; hic adverso suæ ætatis genio obnitens invidiâ laborantes, & expositas opprobrio literas ausus est favore com-

plecti, dignatus est prosequi reverentiâ. Tritum illi callem ingressi comites se vel pedissequos adjunxerunt, per aviam hic solitudinem dux sibi, nemini socius incessit: spes isti vegetas foverunt studiorum, hic prostratas erexit, pessundatas restituit, penè sepultas exsuscitavit: florentem illi demùm suorum temporum famam sustinuerunt aliquatenus, aut tantillùm promoverunt; suum hic seculum nedum insigni honore affecit, quin à gravissima infamia vindicavit; à vulgaribus adeò benefactis vulgarem illi laudem adepti sunt; singularem verò noster à singulari beneficentia consecutus est, certè commeruit, gloriam. Antecessorum is utique merita supergressus est longè, palmam certò praeripuit Accessuris: ei juxta debemus quæ fecit ipse, quæque deinceps alii similia facturi sunt debebimus; quibus ut patrocinio sublevarent literas faustum omen præbuit, lucidam facem prætulit, apertam viam præmonstravit; neminem ut posthac pudere possit impensæ Musis liberalitatis, omnes verò pudere debeat viri talis auctoritatem non sequi, tanti ducis vestigiis non insistere. Verùm in immensæ orationis pelagus improvisò devehor longiùs, & planè sentio quanto

pro-

proclivius sit, argumentum nacto tam nobile, tam splendidum, tam liberale, nimium dicere quàm satis. Contrahам igitur vela, sic tamen ut vestram priùs, præstantissime μακαρῖτα, suppliciter implorem veniam, tuas quòd ego privatas laudes, eximiam in Deum pietatem, versus amicos observantiam, in omnes benignitatem; illibatum candorem animi, inculpatam morum probitatem; singularem in conversando comitatem, in agendo peritiam, in judicando perspicaciam, in differendo facundiam; in officiis colendis fidem, in factis æquitatem, in dictis modestiam, in proposito constantiam; sincerum amorem veritatis, ardens sapientiæ studium, excelsam indolem, & consummatam eruditionem, reliquas & innumeras tuas divinas animi virtutes, præclaras dotes ingenii, egregia vitæ facinora verecundo potiùs obtegam silentio, quàm importuno præconio dehonestem. Quas ego certè cùm ut radios non directo cursu delatos, sed medii densioris interjectu refractos & debilitatos, acceperim; non usu proprio perspexerim, ast alienâ fide subnixus, & solius famæ beneficio cognoverim (famæ licèt certè & indubitatæ, multorumque optimorum & sapientissimorum virorum con-

consonis suffragiis communitæ) si dicendo persequi vellem, quid aliud quàm cæcus clarissimam lucem depingendam, surdus suavissimam harmoniam susciperem emodulandam? ô si viventis intueri vultum amœnâ luce circumfusum, si contemplari gestus placidâ severitate compositos, si degustare sermones tuos melleâ salubritate conditos, istóque guttulas aliquot ab inexhausto gurgite facundiæ mihi depromere licuisset! tuo forsan pectus imprægnatum afflatu quiddam concepisset simile tui, tuo os imbutum nectare te dignum aliquod profudisset. Nunc satius esse duco tantas virtutes omnino non attingere, quàm injuriâ malè pertractatas afficere, vel inficeto sermone contaminare. Una tantùm superest laus (nec illa tamen postremis accensenda) quam nullâ ratione debeam ego intactam præterire; felicissimæ dico laus prudentiæ, illis in deligendis & deputandis adhibitæ, quibus supremam (suæ voluntatis exequendæ dicam, an dispensandæ charitatis?) curam commendaret. Quippe cùm irrita sæpe fiant, & sperato excidant successu vel optimè ab hominibus destinata, istorum quibus committuntur vel improbâ perfidiâ, vel ignavâ supinitate, vel insipiente

piente

piente vecordiâ, id abunde cavit nè sibi eveniret, cùm testamento suo præficeret duos incorruptâ fide, invictâ diligentiâ, spectatâ prudentiâ viros, quorum utcunque non gratâ recordatione prosequi nomina flagitiosum esset mihi, ipsorum cùm erga vos summam observantiam, tum singularem in meipsum humanitatem experto. Unus haud perinde forsitan cognitus vobis (dignus tamen qui pernoscatur ab omnibus colatúrque) ornatissimus & spectatissimus vir, Robertus Raworth, *Ælio illi Sexto, jurisconsulto Ciceroniano, geminus ac persimilis: Egregiè cordatus homo, cautúsque, qui cum insigni juris peritia non inferius justitiæ studium conjunxit, cum magno rerum usu raram mentis integritatem sociavit; in eo præcipuè mirabilis & felix, quòd cùm ad æquitatis normam dirigat omnia, nec unquam honestè faciendi voluntatem bene audiendi gratiæ postponat, optimi tamen viri apud omnes consequi potuit opinionem, & cum recta conscientia integram famam conservare. Quadratus homo planè, ínque eo, cui ipsum ratio affixit, situ inconcussus; antiqui moris, apertæ sinceræque indolis, nullâ involutus nube, nullo fuco incrustatus; in dijudicandis rerum*

momentis acer & perspicax; in amplectandis consiliis maturus & circumspectus; in retinendo proposito constans & gravis, ut qui nec temerè suscipiat aliquid, neque se facilè patiatur à probabili instituto dimoveri. Talis denique, cui cùm tutò summa fides haberi, & gravissima negotia rectè committi possint, tum in hac administranda provincia tam fideliter, dextrè, sapienter se gessit, ut non ego tantùm, & qui mihi in hoc munus successuri sunt, sed & universa Academia, bonæque adeò omnes literæ sint immortales illi gratias debituræ. Alter autem nemini vestrûm non ab honesto quem tot annos, imò tot lustra, sustinuit apud vos loco notissimus, à virtutibus suis commendatissimus, ab egregiis erga vos meritis colendissimus, Thomas Buck; *idem ille, cujus quotidie vestris oculis augusta species corporis, & oris veneranda dignitas obversatur; cujus indies promptissimam humanitatem persentiscitis, cujúsque toties in procurandis gravissimis negotiis vestris, asserendo honore, commodis provehendis gnavam, fidam, prosperámque operam experti estis. Vir sanè, qui cùm omnibus bonis artibus haud mediocriter excultus sit, cùm*

pru-

prudentiâ & fide (per tot amplissimorum virorum approbatis judicia, per tot experimenta gravissima demonstratis) primas concedat nemini, tum verò laudibili industriâ plerosque, penè dixissem omnes, longo intervallo post se relinquit mortales. Difficile mihi sit, imò prorsus impossibile, quos ille vestrâ causâ exantlârit labores, quales pertulerit molestias, quanta devorârit tædia verbis explicare, vel ipsius in agendo diligentiam meâ assequi diligentiâ dicendi. Testis eram, (quatenus inquam admiratio permiserat, testis) quanto ille dum rem vestram typographicam urgeret, cum suæ sanitatis, & rei familiaris dispendio, honori vestro prospiceret, commodo deserviret; quæ nempe laus ejus nitidis impressa characteribus ad infimos usque posteros perennabit, ipsisque adeò cum sacris, quibus pretium adauxit quodammodò, & gratiam adjecit, Bibliis æternitati permanebit consecrata. Cæterùm in hoc ipso, quod præ lingua habemus, negotio, non absque vegrandi stupore mihi licebat observare, virum ætate ingravescentem, nec firmâ satis utentem valetudine tantas alienæ rei vigilias impendere vel potuisse si vellet, aut si posset voluisse,

quantas nemo forsan alius, etiam ætate validus, & corpore robustus, suæ præstitisset. Tantus illum ardor inflammavit de vobis bene merendi, tale perficiendi quod occæpisset egregii facinoris incessit desiderium, ut cum annis accrevisse vires corporis, cum ætate vigor animi provectior evasisse, & quò ad vitæ centrum propiùs accederet, eò ferri videretur incitatiùs. At quid ejus in hac conficienda re commemoro sedulitatem, quum in auspicanda potiùs enixum studium, & impensam erga vos benevolentiam debeam prædicare? siquidem illi tantùm non primas ingentis hujus beneficii partes referre debetis acceptas, cujus excitatus admonitu, consilio persuasus, hortatu compulsus mirificus ille Mecænas noster cùm Mathematicam hanc instituerit professionem, tum lectissimo librorum thesauro Bibliothecam vestram ditârit, ornârítque. Quid enim, annon jure beneficii auctor censendus est, qui benefactorem ipsum conciliavit, & quasi donavit vobis; qui alienâ re, suâ verò sapientiâ, suâ profuit voluntate; qui aliorsum exundantes munificentiæ rivos in aream vestram deduxit? absque quo certè fuisset, non esset hodiè quòd tantum ego studiis

diis adminiculum, tantùm Academiæ ornamentum, tantum ſeculo exemplum gratularer acceſſiſſe. Hæret profectò lingua, deficit ingenium, collabaſcit animus verba perquirenti tanto beneficio quadantenus adæquata; cujus magnitudinem vos cogitando faciliùs æſtimare, quàm ego dicendo poſſim exprimere. Ab inſuperabili proinde conatu ſubducam me, poſtquam id unum fuero proteſtatus, illius in me viri eximiam benignitatem pulchriùs longè atque uberius commeruiſſe gratitudinis teſtimonium. Huic igitur obeundo officio deſignati par illud virorum tale tantúmque, quid? an adhibitam ſibi fidem violârunt, de ſe conceptam ſpem deluſerunt? num pro more nimis quam recepto, privato compendio intenti, vel deſidiæ ſuæ indulgentes ſperatum beneficii fructum in plures annos diſtulerunt? imò nec unum permiſerunt excurrere non liberatæ fidei ſuæ, non abſoluti propoſiti teſtem. Quin ad opus ſemetipſos accingunt ocyùs; libros properè curant ad vos deportandos; profeſſoris exolvendo ſalario terras redimunt, officio definiendo leges præſcribunt, nihil non expediunt quo minùs tanti beneficii ſenſum expectandi mora corrumperet; at verò potiùs

ut ſpem veſtram ſua celeritas anteverteret, vix ut priùs ſciretis habituros, quàm habere ſentiatis. Leges dixi præſcripſerunt; illas verò quàm ex ſe æquas, quàm ſtudiis proficuas, quàm rerum circumſtantiis accommodatas, ſententiam proferre nolo, neque tantæ rei mihi temerè cenſuram arrogabo. Illud ſaltem auſim affirmare, liquidò mihi compertum, à viris qui viderunt, judicio valentibus, & nullo præjudicio occupatis (viderunt autem permulti dignitate juxtà ac ſapientiâ præcellentes) modicè dicam, pleroſque omnes admodum probâſſe; nec paucos illas qualicunque laude dignas cenſuiſſe; dignas utcunque viſas quas reclamante nemine authoritas Regia ſanciret, & ratas faceret. Ità partibus ſuis abſolutiſſimè perfuncti, non tamen eò proceſſiſſe contenti ſubſtiterunt, at voluntate bene merendi poteſtatis ſuæ limites quodammodò prætergreſſi, privilegia bene multa huic loco ſeu valde utilia, ſeu planè neceſſaria, quæ præſtare non poſſent ipſi, à Regia clementia ultrò impetrarunt; quo nomine quicunque poſthac hujuſce profeſſionis munus amplectentur, tenebuntur eos ceu fundatores alteros, certè fautores palmarios, libenter agnoſcere, gratè profiteri. De

illis

illis porrò, quorum præcipuè res hæc gesta est, & ordinata consilio, reverendis Collegiorum præfectis, mihi quantum ætate præcedentibus, & antestantibus dignitate, tantùm judicio prævalentibus, & elogio superioribus meo, nihil audebo quicquam enarrare; id unum dixero fecisse illos, quod rem publicam spectat, ut tales viros decuit, sapienter ac moderatè; à me autem cunctos haud exiguam iniisse gratiam -- duobus præsertim, cùm elapsi tum instantis anni, dignissimis Procancellariis pro sua erga me propensa comitate, benevolentiâ, favore quas possum maximas debeo, ago, habeo gratias. Ità qualitercunque persoluto gratæ commemorationis debito, de meipso forsan expectatis, ut nescio quid edisseram; quibus præsertim causis inductus priori isto me abdicârim munere, novum hoc denuò assumpserim; quippe cùm propterea ceu desultoriæ levitatis, aut fluxæ fidei homo, mei decoris nimiùm incuriosus, vestrique parùm reverens arguar forsitan aut insimuler à quibusdam; quos tamen (si qui sunt) rectiùs facturos autumo, si judicii sui acrimoniam maturiori consilio temperent, nec alieni animi statum Lesbiâ sortis regulâ metiantur; cùm

ſubinde vel firmiſſimæ rupes reciprocos æſtus ſubeant, & conſtantiſſimi plerique viri variis rerum vicibus exagitentur. Rem ipſam quod attinet; Græcam ego provinciam, nemini ſanè tunc optabilem, & immane quantum laboris exiguâ, imò nullâ, mercede compenſantem qui renitenti animo ſuſcepiſſem, cùm in meliùs demutatâ loci conditione plures augurarer futuros, qui id muneris cùm aggredi vellent lubentiùs, tum digniùs exequi poſſent, nil planè quicquam obſtare deprehendi, quo minùs, nullo veſtro incommodo, genio meo prorſus obſecundarem; permoleſtum onus leviculo penſo commutarem, è Grammatico piſtrino in Mathematicam palæſtram me ſubducerem. Etenim ſicuti nunquam à Philologiæ prorſus abhorruerim, ità nè diſſimulem philoſophiam ſemper impenſiùs adamavi; ut vocularum ludicrum aucupium moroſè non deſpiciam, ità ſeriam rerum indaginem magìs cordicitus amplector; omnis tædii non uſquequaque impatiens, modici verò otii appetentior ſum; omni verſus alios injuriâ ſic abſtinere ſtudeo, ſalvum ut velim mihi legitimum mei arbitrium; voluntatis denique veſtræ cùm obſervantiſſimus perſtiterim, & ſtudioſiſſimus

digni-

dignitatis, libertati tamen meæ nunquam renunciâram penitus, non insolubili servitutis nexu dominæ me Grammaticæ obstrinxeram, nec aures ultro meas Linguis obtuleram perforandas, ut non licuerit honestam occasionem arripere memetipsum emancipandi, nedum ut debuerim amicis, ad munus invitantibus, minùs equidem honorificum, at multo commodius, genio meo acceptius, & liberali otio abundantius, refragari. Quid multa? jure meo usus sum, non alienum invasi; possessione meâ decessi, neminem extrusi suâ; honore meipsum exui meritum meum excedente, non indignâ quenquam affeci contumeliâ, nedum ut vobis, charissima mihi colendissimáque capita, dedecus inferre meditarer, quos pronissimo semper affectu complexus, devotissimo cultu adveneratus sum, quorúmque honori, siquis alius, pro exili modulo virium, cupidâ mente, promptâ operâ, dictis factisque nunquam non attentissimum me præstiterim, addictissimum demonstrârim. Nec è consuetudine vestrâ longè mihi dulcissimâ exoptatissimâque, nisi sonticâ quadam necessitate adactus, prædurâque constrictus inopiâ vel ex parte recessissem. Nullis certè machinis impulsus

pulsus à vobis divelli penitus, nullis conditionibus allectus perduci poteram, ut è vestris omnino castris transfugerem; neque sub aliis uspiam gentium quàm insignibus vestris militavi. Quinimò non tam fines vestros dereliqui, quàm ditionem prolatavi, nomen vestrum protuli longiùs, haud ignominiam vobis accersivi; neque tam sponte meâ demum, quàm fato quodam abreptus videor futuri provido, præsagóque, ut in alia quadam obscuriore arena, quod in hac celebri circo nunc initurus sum, certamini præluderem. Me quisquis igitur hanc ob rem ceu perfidum desertorem aut fugitivum mancipium sugillat inclementiùs, viderit ipse quàm justas, quámque probabiles iræ suæ causas prætexat. Utcunque nequeo non effusâ mihimetipsi cum lætitiâ gratulari, tot erroribus defunctus, tot ereptus fluctibus, tot vicissitudines permensus quòd in hunc tandem placidissimum portum appulerim, in hac tutissima statione requiescam; nec enim fere votis meis congruentius quicquam potuisset evenire, quàm in almæ matris sinu, omnimodis innocuis deliciis refertissimo, in vestro (hoc est hominum indole perquam sincerâ, candidóque pectore, sublimi captu, & excel-

lente

lente doctrinâ præditorum) Regibus, opinor, ipsis invidendo consortio; in pulcherrimo Musarum palatio, sanctissimo templo virtutis, amplissimo bonæ mentis gymnasio, illustrissimoque præstantium exemplorum theatro; ingenio expoliendo, moribus efformandis, componendis affectibus, liberalibus scientiis unà vobiscum condiscendis intentum; satìs honestâ nec admodum onerosâ servitute mancipatum vobis, & minimè aspernandâ conditione perfruentem ætatem agere; id quod sanè, libera modò concedatur optio, centies malim quàm aut aulicas inter pompas, aut tumultus urbanos, aut rusticas solitudines, in re quantumvis lauta, quibuscunque seu copiis affluens, seu diffluens voluptatibus, seu titulis insignitus commorari & consenescere. Quam proinde felicitatem, non sine propitii numinis, meis meorúmque rebus per nuperas istas calamitates gravissimè afflictis benignè providentis, singulari misericordia mihi concessam, quâ par est erga divinam majestatem humili reverentiâ, ac piâ mentis devotione percipio. Tum verò optimorum virorum ambitu nullo conciliatam, nullâ solicitatam prece, sed purissimâ sponte mihi delatam benevolentiam

grato

grato ſenſu mentis amplector, & agnoſco; cui cùm nequeam omninò parem, hanc ſaltem adnitar referre gratiam, ut efficiam ſcilicet quadantenus, demandatum mihi officium gnaviter exequendo, nè aut collati in me beneficii pæniteat ipſos, aut concepti de me pudeat judicii. Quod non eò dico quaſi tenuitatis meæ parùm conſcius ſim, aut aliquid arrogem mihi (quum imbecillitatem propriam intimè ſentiam, indignitatem palam confitear) at quò ſtimulos addam induſtriæ meæ, labantem animum ſuſtineam, auctor fiam mihi ipſi, nè deſperem ingenii mei defectum ſtudio ſupplere, quódque ab uſu mihi deeſt curâ compenſare. A vobis autem, Ingenui quotquot eſtis literarum alumni, nihil non ſpero, non polliceor mihi candore veſtro, veſtrâ humanitate digniſſimum; nec ullatenus addubito, quin & faventibus me votis hactenus proſecuti, nunc & alacri porrò gratulatione ſitis excepturi; minimè ſcilicet immemores, quam ante plures olim annos indicâram bonæ voluntatis Mathematica hæc ſtudia ſeu in exilium procul ablegata revocandi, ſeu profundis tenebris demerſa in apricum retrahendi. Enimverò ſi tunc privatus homo nec alioquin obnoxius,

&

& solâ rei pulchritudine accensus, ità me comparaverim, ut scientias istas qualicunque studio meo vobis exoptaverim summopere commendatas, non est quòd nunc ambigatis pro ratione publici muneris, & sanctiori vinculo constrictum, iis pro tenui facultate mea promovendis acriùs incubiturum, quando nimirum quò tum propendebam animo, eò jam propellar officio. Quod autem à me jam leges districtè postulant, id quovis injussu præstare quàm liberrimè semper fui paratissimus, ad familiares vos congressus ut non modò promptè admitterem, verùm ultrò cupidè invitarem; útque non semel tantùm vel bis quâlibet septimanâ cubiculi fores aperirem, sed vel intimi cordis indies penetralia recluderem, & patulum adituris pectus exhiberem. Quin accedite sultis jugiter, adolescentes studiosi, nullo metu cohibiti, nullo pudore retardati; quod jure vestro potestis, & me facietis haud invito, imò adlubescente gaudentéque, consilium audacter expetite, exigite, præcipite & imperate, jussis utique vestris non aversum me vel refractarium, sed officiosum atque morigerum percepturi. Siqua vos studii Mathematici salebrosum iter ingredientes obstacula præpediant, dif-

ficultates

ficultates avertant, dubia remorentur, facite me, obtestor, participem, illud omne (quousque vel usu valeo vel industriâ consequi possum) quicquid est offensionis submoturum. Hisce verò disciplinis ut strenuam navetis operam, inque pulvere Mathematico haud segniter desudetis, si nil aliud impelleret, illud saltem honestarum mentiùm vos calcar extimulet, inflammêtque vehementiùs qui generosis semper animis altè insidet ardor illustria quæque exempla persequendi. Nam ut veteres illos præteream, mirificum Pythagoram, sagacem Democritum, divinum Platonem, subtilissimum prudentissiméque doctum Aristotelem, quos nimirum omnis hactenus ætas agnovit & suspexit meritò sapientiæ antistites, artium coryphæos; quorum quantopere judiciis arriserint hæc studia cùm luculenta proclamant historia, tum ipsorum arguunt præclara monumenta Mathematicis passim interspersa ratiociniis, Mathematicis exemplis, ceu stellis, illustrata; quæ proinde frustrà speret quispiam non in hisce literis mediocriter versatus penitus intelligere, vel illorum abditos sensus non adhibitâ clave Mathematicâ reserare. Ecquis enim Aristotelicum nisi

plectro Mathematico feliciter organon pulset; aut ad philosophi physicas auscultationes Geometriæ ignarus non prorsus obsurdescat? quis Platonicum Socratem capiat expers (Geometriæ dicam an) Arithmeticæ de quadratis numeris vel cum puerulis balbutientem; aut ipsum assequatur Platonem nedum de mundo ad Geometricas rationes conformato, sed de Rep. dissertantem, & politicas etiam leges ad Mathematicam amussim exigentem? nec ut recentiores illos commemorem acumine similes antiquis, & prope pares, Galilæum, Gassendum, Gilbertum, Mercennum, Cartesium, quósque alios præsentis ævi fert fama Matheseos unico fretos subsidio naturalis scientiæ pomæria priscos ultra terminos extendisse; ad quorum scripta, Geometricorum diagrammatum radiis ubique collucentia, harum rerum imperiti, ceu ad solis lumen coruscantis noctua, exhorrescunt. Quin ad illas potiùs scientias, quales hodie se ostentant conspiciendas obtutum dirigite, magnatum purpurâ redimitas, principum se titulis venditantes, ipsorum regum soliis insidentes; neminis ferè generosâ stirpe prognati, qui vel ingenii laudem ambiat,

aut

aut operam philosophiæ seriam devoveat; non opinione magnifactam studio quæsitam, præconio celebratam; quos omnes in genere quolibet ingenuæ literaturæ indecorum sit æquiparari vobis, turpissimum antecellere. Præsertim cùm Universitatis quod profitemini nomen adimplere, decúsve sustentare non aliâ ratione valeatis, quàm si omnigenæ scientiæ liberali ingenio dignæ non vulgarem vobis peritiam vindicetis; & nisi vel invidentibus felicitati vestræ, vel famam æmulantibus ansam detrahatis obtrectandi, quòd vel in linguis ediscendis ceu semper infantes ætatem conteratis; vel ex obsoletæ vetustatis ruderibus putidas fabellas eruentes veritatis indagandæ curam respuatis; vel inconsultâ rerum naturâ, sinceræque rationis usu posthabito verborum inanes phaleras, & fucati sermonis præstigias affectetis; vel sophisticis demum tricis, & futilibus argutiis impliciti, steriles rixas conserentes, lubricis inhærentes conjecturis, & incerta dogmata ventilantes otium abutamini, operam ludatis, ingenia miserè vestra vexetis & torqueatis. Quæ in vos (improbè fateor & immeritò, sæpe tamen & seriò) congesta opprobria vel eluatis facilè, vel omninò devitetis, divi-

nam

nam modò Mathesin quâ par est diligentiâ consectemini: Mathesin, subtilitate non spinosâ, difficultate neutiquam perplexâ, disquisitione minimè contentiosâ studiosos animos exercentem validè, non vanè deludentem, non anxiè discruciantem; sine pugna vincentem, sine pompa triumphantem, absque vi cogentem, citra jacturam libertatis absolutè dominantem; non imbecillæ fidei subdolè struentem insidias, sed armatæ rationi apertum Martem inferentem, integram palmam extorquentem, inevitabiles catenas injicientem; quot verba, tot fundentem oracula; quótque opera, tot miracula patrantem; nihil effutientem temerè vel ineptè molientem; sed universa perspicuè demonstrantem, promptè peragentem; non scientiæ fallaces umbras obtrudentem, sed ipsissimam animo scientiam ingerentem, cui adhærescat firmiter, quam continuò possideat, à quâ nunquam aut sponte suâ decedat, aut ullâ vi depellatur: mathesin denuò, principiis menti claris, experientiæ consentaneis suffultam, certas conclusiones elicientem, utilibus regulis instructam, jucundas quæstiones enodantem, mirabiles effectus producentem; artium, penè dixissem omnium, fœcundam

parentem, ſcientiarum inconcuſſam baſin, in rem humanam emergentium commoditatum uberrimam ſcaturiginem; cui ſaltem uni æquum ſit, ut præcipua vitæ oblectamenta, præſidia ſalutis, incrementa fortunæ, compendia laboris accepta referamus. Quod eleganter & commodè habitamus; decoras ædes extruimus nobis, auguſta numini delubra ſtatuimus, admiranda poſteris monumenta relinquimus. Quòd tuti ab hoſtili incurſione vallis protegimur; arma dextrè tractamus, aciem ſcitè diſponimus; arte quâdam, non ferinâ rabie belligeramur. Quòd ſecura per infidos fluctus commercia tranſigimus; recto per cæcas maris vias itinere progredimur, incerto ventorum impetu propulſi deſignatos ad portus pervenimus. Quòd rationes noſtras verè ſubducimus; cenſum familiarem rectè conjicimus, negotia verſamus expeditè; numerorum diſpalatas phalanges in ordinem redigimus, tabulis includimus, calculo ſupponimus; arenarum quamlibet ingentes cumulos, imò vel immenſas atomorum congeries facilè computamus. Quòd agrorum fines pacificè diſpeſcimus, momenta ponderum æquâ lance perpendimus, juſtâ ſuum cuique menſurâ diſpenſamus. Quòd

vaſtas

vastas hinc inde susque deque quò volumus levi digito moles protrudimus, & immanem rerum perpusillâ vi resistentiam profligimus. Quòd terreni faciem orbis delineamus accuratè, rémque mundi publicam nostro simul universam conspectui subjicimus. Quòd temporis fluxam seriem aptè digerimus; rerum vices agendarum debitis intervallis distinguimus, tempestatum varios recursus, annorum & mensium statas periodos, alterna dierum & noctium incrementa, dubia lucis ac umbræ confinia, exquisita horarum & minutorum discrimina, ritè percensemus & internoscimus. Quòd radiorum solarium in usus nostros subtilem efficaciam derivamus; visûs sphæram in immensum exporrigimus, vicinas rerum species ampliamus, semotas adducimus, occultas detegimus, latebris suis naturam excutimus, & sua callidè dissimulantem arcana revelamus. Quòd concinnis simulachris oculos nostros oblectamus, artificia naturæ peritè æmulamur, opera pulchrè exprimimus: æmulamur dixi? imò superamus; dum nusquam existentia jucundè effingimus, absentia sistimus nobis, præterita repræsentamus. Quòd harmonicis concentibus animos reficimus, aures

emulcemus; aërei fluctûs inconstantiam certis modulis attemperamus; arido stipiti festivam vocem indimus, & à rigido metallo dulcem elicimus facundiam; non dissonâ laude concelebramus Deum, & beatos cœlitum choros haud absurdè imitamur. Quòd inaccessas nubium sedes, dissitos tractus terrarum, devias æquoris plagas, elatos vertices montium, radices infimas vallium, profundas marium voragines, abstrusos telluris recessus attingimus & perscrutamur. Quòd ipsos mente superos accedimus, imò superos admovemus nobis; æthereas arces conscendimus, per cælestes campos liberè spatiamur; astrorum emetimur magnitudines, interstitia definimus; leges ipsis præscribimus inviolabiles cœlis, & vagos syderum circuitus strictis cancellis coercemus. Quòd mundanæ denique machinæ portentosam molem animo comprendimus; opificii divini stupendam pulchritudinem rectiùs æstimamus, sapientiùs admiramur; nostræ mentis incredibilem vim & perspicaciam certis experimentis addiscimus, ut pio affectu agnoscamus. Ut omittam rationem nostram in palæstra hac Mathematica cùm ad validè intorquenda argumentorum tela, tum ad cautè declinandos

sophis-

ſophiſmatum ictus; tam ad nervosè diſſerendum, quàm ad ſolidè dijudicandum, ad promptè inveniendum, ad rectè diſponendum, ad perſpicuè explicandum utiliter excitari. Nec non ad attentæ meditationis perferendum tædium, ad alacrem cum objectis difficultatibus conflictum, ad pertinacem in ſtudiis ſolertiam uſu componi mentem, robore confirmari; quinetiam hiſce diſciplinis aſſuefactam à credula ſimplicitate penitus liberari, contra ſcepticam vanitatem fortiſſimè muniri; à temeraria præſumptione validè cohiberi, ad debitum aſſenſum facillimè inclinari; legitimæ rationis imperio perfectè ſubjici, iniquæ fallacium præjudiciorum tyrannidi contumaciter obluctari. Inſtabilem porrò phantaſiam hâc veluti ſaburrâ librari, hâc fluctuantem anchorâ retineri; obtuſum ingenium hâc cote exacui, luxurians hâc falce caſtigari; præfervidum hoc fræno reprimi, torpidum hoc ſtimulo excitari. Nullâ clariùs lampade per naturæ caliginoſas ambages, nullo certiùs filo per intricatos philoſophici labyrinthi anfractus incedentium regi veſtigia; nec aliâ demùm bolide veritatis fundum felicius explorari. Nè dicam quàm variâ per-

cognitarum rerum supellectile ditetur, quàm multiplice poliatur ornatu, quàm salubri pabulo nutriatur animas, & quàm sincerâ voluptate perfundatur. Sin præterea dicam, dum à materiâ sensibili mens abstrahitur & attollitur, puras formas distinctè speculatur, pulchras ideas concipit, congruas proportiones investigat, ipsos mores corrigi sensim & concinnari, affectus componi & compurgari, phantasiam sedari ac serenari; ad diviniores intellectum contemplationes erigi atque excitari, nec solus id nec primus dixero, sed maximorum in philosophia nominum sententiam meam autoritate defendero, suffragiis confirmavero. Dies me, vox, & spiritus deficerent vel summa rerum capita cursim perstringentem. Nam illius quæ cœlos, quæ terras, quæ maria pervagatur & permetitur, scientiæ nulla justè limites describat, nulla plenè complectatur utilitates, nulla perfectè laudes exhauriat oratio. Et alioquin in re decantatâ ab omnibus, vobísque, reor, satis intimè perspectâ, improbè desipiens sim, si aut meam immoderatiùs abutar operam, aut vestram importuniùs exagitem patientiam. Quanquam haud abs re, nec præter instituti

mei

mei rationem fecisse videor, quòd vestram modò patientiam strenuè exercuerim; cùm ipsâ patientiâ nulla sit ad Mathesin aut aptior aut utilior introductio, nec alius quisquam sit ad has disciplinas optimè comparatus, quàm cujus aures, orationis nec insipidæ fastidio devictæ, nec jejunæ tædio delassatæ, per integrum ad minus bihorium, toleranter ac obstinatè, vapulare didicerunt. Orationis meritò dixi jejunæ, eóque magis tempestivæ (quis enim ab esu mutorum piscium evadat eloquens, aut immunis culpæ sermone jam luxuriet?) quam si vobis scîero vehementer displicere, facilè me consolabor, imò magnopere congratulabor mihi, validum indè deducturus argumentum, certum augurium desumpturus, quòd optimum me hodie præstiterim Mathematicum, hoc est pessimum Oratorem. Dixi.

MATHEMATICI PROFESSORIS LECTIONES.

LECT. I.

MAthematicas ſcientias pro muneris inſtituto tractaturus, antequam ipſarum ingrediar penetralia, in veſtibulo pauliſper conſiſtam, iiſque qui ad hæc ſtudia minùs accedunt parati ſeu morem geſturus, ſeu gratum opinor, facturus eò ſpectantia generalia quædam ἐξωτερικὰ prælibabo. Id quod, omnibus prætermiſſis ambagibus, continenter aggrediar facere, hac ferme méthodo. Primum de nomine paucula diſſeram, tum de objecto ipſarum,& indè ſubnaſcente partitione; proximè de modo verſandi circa objectum, hoc eſt ejus proprietates inveſtigandi & demonſtrandi (ubi de principiis quæ aſſumunt; de propoſitionum quas eliciunt differentiis; de methodo duplice demonſtrandi per analyſin, & ſyntheſin, déque

déque aliis affinibus materiis se præbebit occasio disquirendi.) Postremò de ipsarum origine, progressu, incremento nonnulla forsan historica subjungam.

Nomen primò quod attinet, cùm disciplinæ vocabulum, ex proprio & primario significatu, commune videatur scientiæ cuilibet acquisitæ, & discere nihil aliud vulgò sonet, quàm in rei, quam ignoravimus, notitiam devenire; (quo sensu Sextus Empiricus contra quaslibet artes pervulgatas (Grammaticam, Rhetoricam, Logicam, & cæteras) disputationem instituens, libros inscribit suos contra Mathematicos; nec non præcipui auctores *τὰ μαθήματα*, & *τὴν μάθησιν* pro quavis doctrina usurpant. Plato. Οἱ *φύσει λογιστικοὶ, εἰς πάντα τὰ μαθήματα, ὡς ἔπος εἰπεῖν, ὀξεῖς φαίνονται*: *Qui*
7. de Rep. *ad computandum naturâ bene comparati sunt, ad quidvis discendum promptos se exhibent.* Aristoteles. Πᾶσα *διδασκαλία, καὶ πᾶσα μάθησις διανοητικὴ, ἐκ προυπαρχούσης γίνεται γνώσεως.* Apud eundem in Politicis habetur *μάθησις ὀψοποιικὴ* opsonia conficiendi disciplina. Sed quid ista, cùm sexcenta passim occurrant talia?) Unde igitur hæ scientiæ peculiari modo nuncupantur Mathematicæ, hoc est, disciplinales; & *τὰ μαθήματα*, per disciplinam comparatæ scientiæ (nonnunquam singulariter *τὸ μάθημα*; ut Aristoteli: *οἷον*, inquit, *τὸ περὶ τῆς ἴριδος· τὸ μὲν γὰρ ὅτι φυσικοῦ εἰδέναι, τὸ δὲ διότι Ὀπτικοῦ, ἢ ἁπλῶς, ἢ κατὰ τὸ μάθημα*) *Iridis rationem Optici est ostendere, vel simpliciter à se, vel ex Mathematica scientia* (Geometriam innuens, ex qua Opticus suarum conclusionum rationes desumit)

2. Post. Anal. initio.

Lib. 1. Polit. cap. 7.

1. Anal. Post. c. 13.

ſumit) denique per metonymiam quandam actionis pro objecto frequenter appellantur, ἡ μάθησις, diſciplina? quamobrem, inquam, iſtæ ſcientiæ his nomenclaturis inſigniantur, ambigitur, & plures, aliæ ab aliis, adſignantur cauſæ. Quidam propter ipſarum eximiam evidentiam, certitudinem & conſtantiam hoc nomine donatas arbitrantur, cùm alia nulla cognitio, qualitatibus iſtis deſtituta, diſciplinæ nomen mereri videatur; nec videri debeat quiſpiam aliquid didiciſſe, quod non & clare percipiat, & firmiter amplectatur, & * pertinaciter retineat. Qui velut in tenebris palpat, aut opinione fluctuat, || aut à ſententia dimoveri poteſt, haud quaquam didicit. Itaque cùm conditiones iſtæ ſcientiis, quæ dicuntur, Mathematicis vel ſolis vel excellentiori modo conveniant, propterea volunt iſtis diſciplinarum titulum adpropriari meritò. Alii ſic denominatas idcircò putant, quòd non adeò ſint obviæ, ſed præcipuæ difficultatis aliquid contineant, & proinde Magiſtri cujuſdam præeuntis, vel interpretis opem deſiderent; & impenſiori quadam attentione ac ſtudio debeant addiſci. Juxta Platonis illud: Οὐδεμία πόλις ἐντίμως αὐτὰ ἔχει (mathemata ſcilicet) ἀδυνῶς τε ζητεῖται χαλεπὰ ὄντα, ἐπιστάτην τε δέονται οἱ ζητοῦντες, ἄνευ οὗ οὐκ ἂν εὕροιεν· *Nuſpiam in pretio ſunt, & languidè illis incumbitur, propter difficultatem, & quia duce opus eſt ſtudioſis, abſque quo non aſſequantur.* Proclus verò (ſub finem primi in primum elementum commentarii) hujuſmodi videtur rationem adſignare (quam ideò præſertim refero, quoniam acerbiùs carpi, quàm penitiùs intelligi ſolet

* Δεῖ τὸ ἁπλῶς ἐπιστάμενον ἀμετάπειστον εἶναι. *Ariſt.*

|| 1. *Poſt. Anal. c.* 2.

7. *de Rep.*

ſolet à nonnullis) ſcilicet cùm triplex ſit modus (ex ipſius ſententia) ad rerum cognitionem perveniendi; per impreſſionem forinſecus accedentem, per interiorem motum phantaſiæ; pérque diſcurſivam operationem mentis in ſeipſa reconditas ſpecies eruentis, & quaſi ſopitas excitantis; quorum primus ſenſio, ſecundus opinio dicitur, tertius appoſitè vocari poteſt diſciplina; utpote quædam *ἀνάμνησις* (vocabula verò *μανθάνειν* & *μιμνήσκειν* ab eadem videri poſſunt origine profecta, & ſignificatu cognata) & quia *μάθησις* utcunque talem notitiam propriè reſpiciat, ad quam arripiendam nedum idonei, ſed quodammodo parati accedimus; ex prævia quadam, ſubobſcura licèt, ediſcendæ rei notione. Quo caſu ſibi Mens quaſi magiſtræ defungitur officio, ſeipſam erudiens, ac inſtituens. Hæc autem cognitionem adipiſcendi ratio cùm hiſce ſcientiis præcipuè congruat (quippe quæ ſint ut ipſius Procli verbis utar, *κινητικαὶ τῆς γνώσεως, καὶ ἐγερτικαὶ τῆς νοήσεως, καὶ καθαρτικαὶ τῆς διανοίας, καὶ ἐκφαντικαὶ τῶν κατ' οὐσίαν ἡμῖν ὑπαρχόντων εἰδῶν, λήθης τε καὶ ἀγνοίας ἀφαιρετικαὶ, καὶ ἀπολυτικαὶ τῶν ἐκ τῆς ἀλογίας δεσμῶν*; hoc eſt, *rerum notitiam promoveant, contemplationem exuſcitent, rationem expurgent, inſitas ſpecies eliciant, oblivionem ac inſcitiam amoveant, erroríſque vincula diſſolvant*) & cùm hæc animadverterent Pythagorei, qui haſce ſcientias vel invenerint primi, vel imprimis excoluerint, idcircò Μαθηματικῶν ἐπιστημῶν Illis nomen indiderunt, propter modum ſcilicet illas inveniendi, & acquirendi diſciplinæ titulo digniſſimum. Ità ferè Proclus, equidem ſubtiliter, & ingenioſè.

Verùm

Verùm elegantiùs forsan conficta, quàm veriùs adserta sunt hæc omnia. Nec enim hoc vocabulum (ut nec alia pleraque) tam argutà ratione conquisitum, quàm ex communi usu, probabili causâ nixo, deromptum videtur. Itaque sic dictas potiùs arbitror has scientias, quia cùm Græci primitus inciperent ad artium studia animum appellere, solæ hæ in Scholis traderentur, quum nec dum aliæ inventæ essent artes, quas ediscerent pueri. Hisce solis, inquam, artibus incubuerunt, nec aliud quid illis innotuit sciendum, exceptâ philosophiâ, quæ non tam discebatur á pueris, quàm à senibus anxiè quærebatur, (nec enim primis istis seculis inter eos, qui ad eruditionis qualemcunque gradum adspirarent, fere repertus est quisquam arrogans adeò, ut sapientiæ se Magistrum auderet profiteri, quique id primò videntur ausi circumforanei isti Sophistæ justas ideò Socrati pœnas dederunt.) Artes autem aliæ scribendi, dicendi, differendi posteriore temporis decursu subnatæ sunt: Et quidem scribendi ars (Grammaticam intelligo) à plerisque ad ipsum Aristotelem refertur authorem; saltem circa illius tempora sumpsisse videtur initium; quod enim apud Platonem in Philebo *γραμματικῆς τέχνης* succurrat mentio à Theuth Ægyptio repertæ, id de literarum solummodo descriptione ac usu (utili sanè cum primis, & mirabili artificio) dictum accipio, neutiquam verò de præceptis Grammaticis in artis formam concinnatis, de qua nihil fere quicquam, opinor, Platoni suboluit. Artem verò dicendi (seu Rhetoricen) à Siculis duobus Corace,

race, & Tisia, tantillo ante Platonem tempore, scriptis cœptam consignari ex Aristotele denarrat Cicero; qui tamen ipsi non nisi quædam exilia adumbrâsse videntur istius artis rudimenta; id quod ipse subinnuit Aristoteles sub finem libri de Sophisticis Elenchis; de illis verba faciens: Οἱ τὰς ἀρχὰς εὑρόντες (inquit) παντελῶς ἐπὶ μικρόν τι προήγαγον. Differendi demum ars (Dialectice) ab Eleate Zenone, Socratis contemporaneo ac congerrone, qualecunque (sicuti perhibent) principium sortita, vix tandem Aristotelis operâ (nobis ipse author est) in artis methodum excrevit: Saltem à Pythagoreis & aliis plerisque Platonis antecessoribus philosophis penitus ignoratam & intactam exertè contestatur idem Aristoteles:

1. *Metap. cap.* 6. Οἱ γὰρ πρότεροι (inquit, hoc est Platone antiquiores) διαλεκτικῆς ὐ μετεῖχον. Scilicet in illa studiorum infantia nondum adoleverant artes istæ populares: Nondum venerat illis in mentem è præceptis hauriri posse vel peritè scriptitandi, vel eloquendi facundè; vel argutè disputandi facultates; quas fortè vel naturâ cuique putabant insitas, vel è quotidiano faciliùs usu, quàm ex operosa institutione crederent comparari; nec opinione suâ multùm deceptos ipsa fermè coarguit experientia. Omne igitur studium primis istis seculis circa hæc duo occupatum est, Mathemata scilicet & Philosophiam, quorum illa solebant in scholis à peritioribus Magistris teneræ ætati instillari, hæc provectiorum in suis recessibus contemplationem exercebat; illa ad hanc præparabant animos, & viam muniebant. Quo spectare potest, quòd Laertius

tius à Pythagora triplicem memorat conscriptum commentarium, institutivum, civilem, naturalem (γέγραπ]αι, inquit, τῷ Πυθαγόρᾳ συγγράμματα γ, παιδευτικὸν, πολιτικὸν, φυσικὸν) quo scilicet trino commentario universa temporum istorum doctrina comprehensa videtur: nec ferè dubium est, quin παιδευτικὸν idem designaverit quod μαθηματικὸν; quâ scilicet institutione præviâ ad utramque philosophiæ partem, civilem & naturalem, aditum præstruebat ille primus (certè tum primarius) antistes Sapientiæ Eodémque pertinere videtur triplex illa, quam Gellius tradit, Pythago- *Lib.* 1. ricæ doctrinæ gradatio; juxta quam nem- *cap.* 9. pe illius instituti sequaces ἀκουστικοὶ primò, proximè μαθηματικοὶ, denuò φυσικοὶ dicebantur; hoc est linguam primò compescere, auréſque exercere, ceu rerum omnium ignari; tum aliquid discere, qualemcunque scientiam captare; postremo sapere, hoc est præcipuarum rerum notitiam indipisci studebant. Huc saltem respexit Plato, quum has scientias τὴν προπαιδείαν, (præviam erudi- *7. de Rep.* tionem, hoc est philosophiæ quasi præludium) appellat (in politicis); & cùm Platonis Timæo dicitur Mathesis ἡ κατὰ παίδευσιν ὁδὸς (apud Proclum * primo libro). Eó- ** Pag.* 6. que Xenocrates elegantur Mathemata vocavit λαβὰς τῆς φιλοσοφίας (ansas philosophiæ): Et alius non nemo κλίμακας καὶ ἐπιβάθρα, gradus ac scamna vocat, quibus ad rerum sublimium cognitionem ascenditur; juxta dictum Platonis: Τοῦ ἀεὶ ὄντος ἡ γεωμετρικὴ *7. de Rep.* γνῶσις ἐστίν· ὁλκὸν ἄρα πρὸς ἀλήθειαν ψυχῆς εἴη ἄν· καὶ ἀπεργαστικὸν φιλοσόφου διανοίας;

νοίας, πρὸς τὸ ἄνω ϛῆν. ἃ νῦν κάτω, ἐ δέον, ἔχομεν. Ex antiquiorum denique sententia Theon Smyrnæus, ille Platonicæ Matheseos vetustus expositor, totam exquirendæ sapientiæ rationem, per sacram antiquitus consuetam mysteriorum perceptionem pulchrè repræsentat; cujus cùm omnino quinque gradus vel partes extiterint, καθαρμὸς, τελετὴ, ἐποπτεία, ἱεροφαντεία, εὐδαιμονισμὸς: Et quidem cùm philosophia (rationalis nempe, civilis, & naturalis) τῇ τελετῇ, institutioni in sacris, bene comparetur; Theologia verò τὴν ἐποπτείαν, sacrorum inspectionem, apposite referat; Mathesis τῷ καθαρμῷ, præparatoriæ purgationi, haud incongrue assimilatur, quâ minimè imbuti, ceu profani & inhabiles procul arcendi videbantur à mysteriis sapientiæ. Verùm de his satis; ut concludere liceat has scientias optimo jure dici Mathematicas (vel τὰ μαθήματα, disciplinas) quoniam primitus solæ discerentur: cùm nedum res, at vocabula quoque sint primò occupantis. Quod imprimis ex ipsa rei veritate nomen obtinuerunt, id postea retinuerunt meritò (usu possessionem corroborante) utinam non frustra retineant, quâque par est solertiâ à studiosis adolescentibus perdiscantur.

Nescio vero, de Mathematum nomine dum dispicio, operæ ne fuerit pretium adnotare turpissimum ejus, qui apud Romanos sequioris ævi scriptores, invaluit, abusum; ut scilicet id pessimo, vanissimóque generi hominum Astrologis (Astromantis potiùs, vel ἀστρομάντεσι) Genethliacis, Conjectoribus, divinis, & istius malesani furfuris reliquis

quis propudiosis nebulonibus attribueretur vulgò. Unde Tacito Mathematici, *Genus hominum potentibus infidum, sperantibus fallax, quod in civitate nostra semper vetabitur, & semper retinebitur.* (I. *Hist.*) * Legitúrque facta fuisse de Mathematicis Magísque Italiâ pellendis senatusconsulta: (* *Annal.* I.) [Mathematicis, Magísque; ô dispar conjugium! Simili planè jure, Serpentes avibus geminentur, tigribus agni] Seneca in ἀποκολοκυντώσει Claudiana: *Patere Mathematicos aliquando verum dicere* (genuini Mathematici, ὦ σοφοὶ, nunquam non verum dicunt) *qui illum ex quo princeps factus est omnibus annis, omnibus mensibus efferunt.* Sed hujusmodi penes Suetonium, Tacitum, aliósque illius ævi degeneres historicos, sexcenta succurrunt exempla; unde Gellius: *Vulgus autem quos gentilitio vocabulo Chaldæos dicere oportet, Mathematicos dicit.* (*Lib.* I. *cap.* 9.) Quæ vocabuli nobilissimas & honestissimas disciplinas designantis improba profanatio temporum istorum in extremam barbariem impetu citato delabentium crassam demonstrat inscitiam: Siquidem confusio nominum nunquam non rerum arguit imperitiam. At meliori ævo, cùm apud Quirites plus vigeret eruditio meliùs audiebant Mathematici, quos ab ista fæce circulatorum sibi futurorum præscientiam arrogante solicitè dirimit Cicero: *Num*, ait, *censes eos, qui divinare dicuntur, posse respondere Sol majórne quàm Terra sit; an tantus quantus videatur; Lunáque suo lumine an Solis utatur? &c. Sunt enim ea Mathematicorum, non Ariolorum:* (*De Divin.*) Dignum hercle Cicerone judicium, — *dignum sapiente, bonóque.* Sed de nomine satis dictum superque; nè phi-

philologum potiùs agere videar, quàm Mathematicum, — *iterumque antiquo me includere ludo.* Igitur

Ad rem veniamus, & de Matheseos proximè dispiciamus Objecto; è cujus seu variis speciebus, seu diversimoda consideratione, Mathesis ipsa varias in partes dividitur. Quâ super re primò secundum aliorum placita, communique ferme sententiæ consona trademus, postea de reipsa disquiremus curiosiùs; & quale reipsâ Mathesis objectum contempletur, quousque se extendat, quomodo disterminetur aut distribuatur in partes, quid nostræ sit sententiæ enucleabimus; nec non omni sepositâ authoritate, quædam subinde παράδοξα, (non adeò fortasse παράλογα) proferemus in medium: Nec enim omnia de trivio petere, vel quidvis temere suscipere constitutum est mihi; sed quæcunque se obtulerint quæstione digna liberè discutere, quæcunque veritati videbuntur consentanea, strenuè affirmare non verebor; vestri tamen candoris & acuminis, quæ dixero cuncta, judicio examinanda & decidenda submissurus. Quod igitur attinet objectum Matheseos generale, prout id vulgo statuitur, mirum videri poterit nullum ei, in utravis lingua, proprium vocabulum congruere. Siquidem ἀκυρολόγως Aristoteles τὸ ποσὸν magnitudinis & multitudinis commune genus constituit. (πλῆθος μὲν ἐν ποσόν τι ἂν ἀριθμητὸν ᾖ, μέγεθος δ' ἂν μετρητὸν εἴη· *Multitudo quà numerabilis est* ποσόν τι; *& magnitudo quatenus mensurabilis.*) At verò propriè τὸ ποσὸν quotitatem significat, & solum respicit numerum. E contra quantitas, quo vocabulo

V. Metaph. cap. 13.

cabulo

cabulo τὸ ποσὸν Aristotelicum exprimere solent Latinè, magnitudinem indigitat, nec ad numerum proprie referri potest. Qui defectus nominis magnitudini & multitudini communis argumento forsan sit nullum illis communem conceptum veterum animis insedisse; an sit ullus ex parte rei, posteà disseremus. Quicquid verò sit de generali objecto, satis convenit Mathesin circa duo potissimùm versari; τὸ πηλίκον & τὸ ποσὸν (strictè dictum), hoc est quantitatem & quotitatem; seu malitis, circa τὸ μέγεθος & τὸ πλῆθος, magnitudinem & multitudinem (continuam alii appellitant, discretámque quantitatem, quam appositè etiam posthac forsan disceptabimus.)

Quoniam verò species utraque (magnitudo dico & multitudo) duplici pacto considerari potest; vel quatenus ab omni speciali materia, materiæque circumstantiis, & accidentibus mente separatur vel abstrahitur (hoc est in se generaliter, illis omissis, concipitur) vel quatenus inhæret alicui speciali subjecto, cúmque aliis quibusdam physicis qualitatibus, actionibus, circumstantiis conjuncta, & commista reperitur; hinc emergit divisio Matheseos in puram (vel abstractam) & mixtam (sive concretam). Quam & Plato videtur agnoscere (in Philebo); alias enim disciplinas καθαρὰς, πρώτας, ἡγεμονικὰς (Arithmeticam disertè significans, & Geometriam) alias verò ἀκαθάρτους, impuras, secundarias, minùs exactas asserit. Et puræ quidem, vel abstractæ Matheseos partes magnitudinis ac numeri generalem naturam, & proprias affectiones absolutè contemplantur;

 tur;

tur; Mixtæ verò, vel concretæ, considerant easdem, ut certis corporibus & subjectis specialibus applicatas, cum vi motiva & aliis physicis accidentibus copulatas; (unde φυσικωτέρας appellat Aristoteles; & ‖αἰσθητικάς; alii Physico-Mathematicas vocitare solent.) Pura consequenter Mathesis duplex statuitur; Geometria, quæ magnitudinis abstractæ naturam speculatur, species distinguit, proprietates investigat; &, Arithmetice, quæ multitudinem, seu numerum, ejúsque species & affectiones pari modo contemplatur & pertractat. Mixta verò Mathesis pro materiæ, cui magnitudo & multitudo inesse possunt, varia specie, vel qualitate differenti multiplex est, nec uno proinde modo seu à veteribus, seu à recentioribus philosophis dispertita est, ut mox ostendemus: interim de modo considerandi diverso quæ diximus exemplo uno, vel altero dabimus utcunque illustrata. Itaque exempli gratià; Recta linea, quæ est species magnitudinis, concipi potest vel absolutè, & universalissimè, juxta definitionem ipsius, ut simplicissima dimensio, brevissimum inter duo quæcunque puncta designans intervallum; quo pacto considerata generales quasdam proprietates habet, à Geometra vel præsuppositas, vel demonstratas; aut aliàs; quatenus scilicet. e.g. à centro Solis ad Telluris centrum protensa corporum illorum distantiam signat; vel ut lucis repræsentans radium in hoc corpus impingit, ab illo resilit, per tale medium trajicitur, hinc vel indè deflectitur aut incurvatur; vel ut uno extremo defixa pondus annexum circumferre potest, aut ipsum susten-

tare;

Auscult. Phys. Lib. 2. cap. 2.

‖*Anal. Post. Lib. 1. cap. 13.*

tare; ejúsque pro varia ab immobili centro diſtantia, momento determinando inſervire: vel ut chordam materialem, ſeu canonem, repræſentans diviſione ſuâ multiplices exhibere poteſt ſonorum proportiones. Quibus illam variis modis, ſuo quiſque reſpectivè, Aſtronomus, Opticus, Mechanicus, & Muſicus conſiderant & contemplantur. Simili pacto, Sphæra conſiderari poteſt ut figura talis plani rotatu producta; tali ſuperficie terminata; taliter ſecabilis, aut diviſibilis; certâ ad alias magnitudines homogeneas proportione prædita; quo pacto naturam & affectiones ejus Geometria perſcrutatur: Vel prout in tali diſtantia collocata, per tale medium (uniforme vel difforme) tali lumine colluſtrata talem intuenti ſpeciem exhibet ſui; quomodo verſant illam (aut circa illam verſantur) Opticus juxta atque Aſtronomus: Vel aliter, ut cuivis immerſa materiæ vim obtinet verſus terræ centrum deſcendendi (quam pondus aut gravitatem vocant) pro varia diſpoſitione & ſitu partium, connexione cum aliis materiis, ſuſtentatione vel ſuſpenſione diverſa conquieſcit omnino, vel inclinatur ad certas partes, aut ad talem terminum promovetur; quâ ratione mechanicus illam cogitat & perpendit. Numeros denique aliàs tractat Arithmeticus, ut ipſorum generales affectiones rimetur; aliàs Muſicus, ut ipſos ſonorum exprimendis proportionibus accommodet. Sed hæc ſufficiant exempla. Cæterùm iſta, de qua diximus, abſtractio mentalis nedum Mathematicis ſcientiis propria, ſed omnibus ſcientiis eſt communis. Omnis enim ſcientia ſui ſub-

jecti naturam speculatur, à specialibus subjectis abstractam; præcepta & theoremataque pote generalia format; genuinas ejus proprietates ab alienis accidentibus disjungit; has pensitat, illas dimittit. e. g. Physice corporis universe sumpti constitutiva principia, materiam & formam, vel simile quid, exquirit; tum communes quibuscunque corporibus affectiones (quantitatem, locum, motum, quietem, hisque affines) persequitur; tum dispescit ipsum in proxime subjectas species; harúmque pariter speciales naturas ac proprietates investigat; de singulis vero corporibus vel individuis, quæ vocant, nihil quicquam satagit, tum quia numero prorsus infinita sunt, & innumeris invicem differentiis distincta, tum quia generatim tradita possunt illis adaptari. Haud secùs Geometria magnitudinem (non huic vel illi corpori peculiarem; cœli nempe, vel terræ, vel maris magnitudinem, sed) universè acceptam sibi proponit excutiendam; generales ejus affectiones (divisibilitatem, congruentiam, proportionalitatem, sitûs & positionis diversæ capacitatem, mobilitatem, alias quascunque) venatur; quòd ei insint, & quomodo declarat: Tum varias ejus species (lineam, superficiem, corpus) definit, earúmque distinctas proprietates elicit ac demonstrat singillatim; nec non

Πᾶς γὰρ λόγος, καὶ πᾶσα ἐπιστήμη τῶν καθόλου, καὶ οὐ τῶν ἑκάστων. *Arist. Metaph. XI. 1.*

Arist. Metaph. XI. 3. Ὁ Μαθηματικὸς περὶ τὰ ἐξ ἀφαιρέσεως τὴν θεωρίαν ποιεῖται· περιελὼν γὰρ πάντα τὰ αἰσθητὰ θεωρεῖ· οἷον βάρος, καὶ σκληρότητα, καὶ κουφότητα, καὶ τὰς ἄλλας αἰσθητὰς ἐναντιώσεις· μόνον δὲ καταλείπει τὸ ποσὸν, καὶ συνεχὲς· καὶ τὰ πάθη τὰ τούτων ᾗ ποσά ἐστι καὶ συνεχῆ, καὶ οὐ καθ' ἕτερόν τι θεωρεῖ &c. *Peroptimè.*

non has species in alias dirimit contractiores, istarúmque similiter indagat, & probat passiones (idque continuò donec totam sui subjecti propaginem exhauserit, & ad infimas usque species descendendo pertigerit) invenit, inquam, & probat, per universales propositiones, regulas & theoremata legitimo discursu demonstrata: Quæ theoremata utcunque (pro materiæ natura) magìs vel minùs generalia sibi subjectis singularibus verè & congruè possunt accommodari. Talis (nec alia, quicquid de illa nonnulli mirificè prædicant) videtur vera abstractio Mathematica, qualis nimirum reliquis omnibus convenit scientiis & disciplinis; abstractio scilicet à specialibus & singularibus subjectis; vel consideratio distincta quarundam rationum magìs universalium, aliis non consideratis, & quasi neglectis. At de illâ satis: ad Matheseos divisionem distinctiùs evolvendam recedamus oportet; quam tamen, ni fallor, tempus admonet ut in sequentem lectionem reservemus.

LECT. II.

QUam, in superiori lectione, de Mathematicarum scientiarum divisione proponere cœpimus disquisitionem, nunc exequi conabimur distinctiùs, aliis placita primo loco, tum quæ nobis videntur, tradituri. Pythagorei (οἱ τῶν μαθημάτων ἁψάμενοι πρῶτον, ut ait Aristoteles, qui scilicet e Græcis *1. Met. 5.*

Græcis omnium primi Mathematicas scientias attigerunt) non nisi quatuor Matheseos partes agnoverunt, puras ac primarias duas Arithmeticam ac Geometriam; alteras duas mixtas & secundarias; Musicam & Sphæricam (hoc est Astronomiam) cujus divisionis hæc, ex eorum mente, à Proclo redditur ratio, quòd cùm duæ sint objecti generalis species multitudo, & magnitudo; dupliciter autem considerari possit utraque; multitudo quidem simpliciter & quatenus in se subsistens, vel respectivè ad sonos, quorum exprimit rationes: Magnitudo autem vel prout consistere potest, vel ut motu circumfertur; hinc emergunt istæ quatuor partes Matheseos. Sed ipsum fortè præstet audire Proclum sic enunciantem: Τοῖς μὲν οὖν Πυθαγορείοις ἐδόκει τετραχῇ διαιρεῖν τὴν ὅλην Μαθηματικὴν ἐπιστήμην· τὸ μὲν αὐτῆς περὶ τὸ ποσὸν, τὸ δὲ περὶ πηλίκον ἀφορίζουσι, καὶ τούτων ἑκάτερον διττὸν τιθεμένοις· Τό τε γὰρ ποσὸν ἢ καθ' αὑτὸ τὴν ὑπόστασιν ἔχειν, ἢ πρὸς ἄλλο θεωρεῖσθαι κατὰ σχέσιν· Καὶ τὸ πηλίκον ἢ ἑστὸς ἢ κινούμενον ἔχειν· Καὶ τὴν μὲν Ἀριθμητικὴν τὸ καθ' αὑτὸ ποσὸν θεωρεῖν, τὴν δὲ Μουσικὴν τὸ πρὸς ἄλλο. Eodémque respiciens Boethius, initio Arithmetices, *Illam* (inquit) *multitudinem, quæ per se est Arithmetica speculatur integritas, illam verò quæ ad aliquid, Musici modulaminis temperamenta pernoscunt. Immobilis verò magnitudinis Geometria notitiam pollicetur; mobilis scientiam Astronomicæ disciplinæ peritia vindicavit— Hoc illud quadrivium est, quo iis viandum sit, quibus excellentior animus à nobiscum procreatis sensibus ad intelligentia certiora perducitur.* Istà ratione Pytha-

Pythagorei antiquitus Mathematicam diviſerunt; ideò, reor, quia nondum ad alias (Opticam, Mechanicam, & reliquas) appulerant animum; quas nempe poſterioris ævi curioſa ſedulitas, & ὁ πάντων εὑρετὴς χρόνος peperit ac adinvenit. Cæterùm quid impedit quo minùs de hac ipſa Mathematum quadriga τέτρακτυν illam Pythagoream ex aureis carminibus tantopere celebratam intelligamus? Præſertim cùm admodum futiles abſonæque videantur aliæ pleræque quas interpretes commenti ſunt, eam explicandi rationes. Liceat igitur mihi ſic decantatum iſtum verſiculum enucleare: Ναὶ μὰ τὸν ἡμετέρα ψυχᾶ παραδόντα τέτρακτυν, hoc eſt, Aſſevero per illum (Pythagoram ſcilicet præceptorem noſtrum) qui noſtræ animæ tradidit (hoc eſt, qui nos docuit & præmonſtravit) quaternarium (quatuor diſciplinas Arithmeticam, Geometriam, Muſicam, Aſtronomiam) ſubjicitur παγὰν ἀενάου φύσεως; id eſt quarum ſubſidio ad altiores ſpeculationes (phyſicas & theologicas) præparamur & diſponimur; vel, ex quibus æterna veritate præditis ſcientiis tota rerum natura dependet & derivatur (nam ex numeris & formis Mathematicis, ceu principiis, conſtare cuncta, penes Pythagoreos, nemini non notum, ex Ariſtotelis & aliorum teſtimonio). Sed hæc obiter & vix ſeriò.

Ab iſta verò antiquiſſima diviſione Matheſeos nil fere diſtat illa Platonis quinas in partes diſtributio (in Arithmeticen ſc. Geometriam, Stereometriam, Muſicam, Aſtronomiam) ad quas etiam Theon Smyrnæus omnia apud Platonem Matheſin ſpectantia redegit. 7. *de Rep.*

git. Hæc, inquam, divisio Platonica non aliter differt à Pythagorea, quàm quòd in hac Geometria strictiùs sumpta solam ἐμπεδομετρίαν (seu τὴν ἐπιπέδων πραγματείαν, ut isthic habetur, hoc est de planorum dimensione doctrinam) significet; illic verò latiùs protensa totam μετρικὴν (metiendi scientiam) denotet, ipsámque adeo stereometriam comprehendat. Quamobrem verò Plato, eruditionis adeò diffusæ vir, tam angustos Mathesi limites præstituat, nec alias his disciplinas accenseat, indè factum arbitror, quòd aliæ suo tempore necdum inventæ, vel non satis excultæ fuerint, aut saltem nondum in Mathematum censum relatæ. Nec adeò mirum ab Aristotele plura Mathemata (Opticam sc. Mechanicam, Geodæsiam) adnumerari, cùm ista studia pauxillo post Platonem tempore, viguerint admodum, & immensum brevi progressum fecerint, ipsius præsertim Platonis commendatione excitata. Accedit, quòd adscititias istas ipse Aristoteles nunc accenset Mathematicis, nunc illis abjungit, quia nempe medium obtinent locum; nec Physicæ minùs quàm Matheseos sunt participes. Exemplo sit, ubi Opticam dicit Iridis causam reddere ἢ ἁπλῶς ἢ κατὰ τὸ μάθημα, vel absolutè, vel quatenus Matheseos (hoc est Geometriæ) opem adsciscit; Opticam à Geometria districtè secernens: Et porrò subjicit; τὸ μὲν ὅτι τῶν αἰσθητικῶν εἰδέναι, τὸ δὲ διότι τῶν Μαθηματικῶν; scientias sensibiles, qualis optica, distinguens à Mathematicis. Postea verò latiùs exporrectam & succedentium temporum diligentiori studio adauctam, suísque veluti nume-

1. Anal. Post. cap. 3.

numeris abſolutam Matheſin Geminus (qui circa Pompeii M. ætatem inſignis floruit Geometra) aliique ὁμόδοξοι hoc modo diſpertiebantur, auctore itidem Proclo. Mathematum alia circa τὰ νοητὰ (res intellectu ſolo percipiendas) alia circa τὰ αἰσθητὰ, (res ſenſibus obnoxias) verſari cenſebant; & ad primum quidem genus pertinere duas longè primas & præcipuas partes (τὰ πρῶτα καὶ κυριώτατα μέρη) Matheſeos Arithmeticen, & Geometriam; alteri verò ſex partes competere, Geodæſiam, Logiſticen (id eſt computatricem vel calculatricem) Opticam, Canonicam (id eſt Harmonicam, vel Muſicam) Mechanicen, & Aſtrologiam. Hiſce terminis includi, ex his veluti membris coagmentari volebant totum corpus Mathematicæ; quæ membra rurſus ſubſecabant in alios minutiores articulos: Geometriam ſcilicet diſpeſcentes in Empedometriam, & Stereometriam (Grammometriam forſan haud malè adjeciſſent): Arithmeticen conſimiliter in theorias numerorum linearium, planorum, & ſolidorum. Geodæſiam à Geometria diſtinxerunt, eò quòd hæc non mente ſolâ ſpectabiles, ut illa, ſed involutas materiæ figuras, per inſtrumenta quoque materiata, dimetitur: Ut (Procli exempla ſunt) pro conis acervos in acumen aſſurgentes, pro cylindris puteos; idque per funiculos, amuſſes, perpendicula. Logiſticen pariter ab Arithmetica ſecreverunt, utpote quum hæc non abſtractos numeros conſideret, at rebus ipſos applicet ſenſum incurrentibus; ut cùm dato tempore quot ſui circuli partes ſydus aliquod peragat; ad

pha-

phalangem instruendam quot requirantur milites; quibus impensis ædes extrui possint, exploratur. Opticam porrò, Geometriæ sobolem (radiosas quippe lineas, & visuales angulos ab illa mutuantem) in tres diffiderunt surculos. Opticam propriè dictam (adspectivam dixeris haud inconcinnè) quæ directu obtutu adspectabilium rationes evolvit (ut quamobrem longiùs excurrentes parallelæ lineæ coincidere videantur, & cur quadratum è longinguo spectatum circuli speciem ostentet): Catoptricam, quæ ex radiis ab opaco corpore repercussis, vel in diversi pellucidi medii transitu detortis resultantes apparentias scrutatur (Catoptricam nempe latiùs accipiunt, ut eam quoque, quæ nunc dicitur communiter, Dioptricam comprehendat, aliud quiddam Dioptricæ vocabulo designantes, ut mox videbimus): Et, Sciographicen (Perspectivam hodie, & Scenographiam, nec non Projecturam, & Projectionum artem appellitant) quæ ab aspectabili quovis emissorum radiorum quâlibet objectâ superficie intercepta vestigia delineans, ejus figuram, positionem, distantiam, & reliquas circumstantias congruè concinnéque repræsentat. Canonicam proximè (hoc est Harmonicam vel Musicam) nuncuparunt illam disciplinam, quæ concentuum apparentes rationes dijudicat, & canonis (hoc est regulæ sonoræ) sectione dimetitur, aurium etiam adscito suffragio. Mechanicæ verò, molis corporeæ pondus, & potentiam motivam perpendenti, varias species subjecerunt: Ὀργανοποιητικὴν, quæ instrumentorum, præsertim militarium, fabricam ac usum

com-

commonstrat: Θαυμαστοποιητικὴν, quæ spirituum impetu, vel ponderum nisu, vel tensione nervorum (animales subinde motus æmulantium) multa patrat admiranda (ad quam proinde referuntur Pneumatice, Isorropice, Centrobaryce, Automatopoetice) &, Σφαιροποιΐα, confectio Sphæræ materialis cælestes circuitus exhibentis. Astrologiam denique, quæ mundani Systematis ordinem, cælestiúmque corporum motus, figuras, magnitudines, distantias, influxus contemplatur, partiti sunt in Gnomonicam, gnomonum umbris horaria spatia discernentem; Meteoroscopicen, elevationum differentias, astrorum intercapedines, & his cognata problemata discutientem; Dioptricámque quæ per dioptras (hoc est instrumenta quædam visuales radios trajicientia, & dirigentia) syderum apparentes magnitudines, & intervalla rimatur. Tacticam verò (id est aciem bellicam ritè disponendi facultatem) consultò rejecerunt, & abjudicârunt Mathematicis disciplinis, etsi Logistices ac Geodæsiæ beneficio legiones supputet, & castra metetur; sicut nec (arguunt) historicus idcircò Mathematicus est, quia regionum climata refert, aut urbium ambitum edisserit. Ejusmodi Geminus (aliis adstipulantibus coætaneis) Mathematum instituit partitionem, Pythagoreâ quidem & Platonicâ aliquanto uberiorem, & talem utcunque, quæ præcipuas exhibeat, & complectatur partes, Mathematicarum nomine vulgò donatas; meâ tamen sententiâ non probam satis, aut accuratam. Nam imprimis fundamento nititur ista divisio perquam infirmo, lubricóque; Mathema-

ticam

ticam scilicet vel circa res intelligibiles, vel circa sensibiles versari, cùm revera nullum objectum ipsius non simul intelligibile sit, & sensibile, diverso respectu; intelligibile quidem, quatenus universalem ipsius ideam mens apprehendere potest & intueri; sensibile verò, quatenus inest & convenit singularibus subjectis sensum incurrentibus (quis enim non singulas quasque corporum dimensiones oculo perlustrat, attrectat manu?) Nulla verò ratio est, quamobrem generalium doctrina separetur à consideratione singularium, cùm hanc illa penitus includat, & ex primaria intentione respiciat. Cur alia v. g. scientia sphæram intelligibilem tractet, alia sensibilem? Cùm hæ reipsa prorsus eædem sint, & quoad actum mentis subordinatæ; nec intelligibili (hoc est universaliter intellectæ) sphæræ quicquam tribui possit, quod sensibili (hoc est singulari cuivis) potissimo jure non accommodari possit, & congruat perfectissimè. Unde Geodæsiam à Geometria, Logisticen ab Arithmetica perperam disjungi liquet. Verùm stante isto fundamento, saltem accurata non erit, sed manca prorsus & imperfecta reperietur ista partitio; siquidem rerum sensibilium, quibus applicari possint numerus & magnitudo, multo diffusior est copia, quàm ut limitibus istis circumscribantur; unde vel admissâ ista hypothesi longè latéque patentior evadet Mathematicæ campus; id quod statim clariùs apparebit. Sed de Geminiana partitione satis; quam tamen plerique ferme recentiorum amplectuntur, nisi quòd plures Geodæsiam ac Logisticen hinc exterminent; nomi-

Arist. Met. Lib. II. c. 3.

Ὁ δὲ τὴν καθόλου (ἀπόδειξιν) ἔχων, οἶδε καὶ τὸ κατὰ μέρος. *Anal. Post. Lib. I. c. 24.*

nominatim Blancanus in libello de natura Mathematicarum scientiarum; Petrus Herigonius in antecedaneis ad cursum suum; Guldinus in Prolegomenis ad Centrobaryca, Mathematum divisionem prosequentibus. Duas nimirum puras & primas constituunt partes Matheseos, Geometriam & Arithmeticam; quatuor mixtas & subalternas generaliores, Opticam Mechanicam, Musicam, Astronomiam; quas itidem variis modis in plures subdividunt contractiores particulas. Succurrunt & aliæ, à recentioribus excogitatæ harum disciplinarum partitiones, pleniores aliæ & accuratiores, aliæ graciliores dilutioresque; quarum sanè vel inire numerum (nedum omnes exquisitè percensere) difficile sit, nec admodum utile, cùm ut plurimùm multiplex ista sectio rerum & subsectio præcisior in partes minutissimas, confusionem potiùs inducat, quàm amoveat (*τὰ γὰρ εἰς τὰ μερικώτερα τεμαχίζοντα τὴν διδασκαλίαν δυσπερίληπτον ἀπεργάζεται τὴν γνῶσιν*, * ut Proclus ait) præsertim cùm earum * *Pag.* 21. pleræque omnes iisdem obnoxiæ sint argumentis, quibus ostensum est prædictam Gemini divisionem impugnari. Quare prætermissis istis, rem consulemus ipsam, & nostri quid sit judicii aperiemus.

Ego sic existimo: Primò, non aliam reipsa quantitatem existere diversam ab illa, quæ magnitudo dicitur, vel quantitas continua; hanc proinde solam Matheseos objectum meritò reputari, cujus illa generales imprimis proprietates, tum species proximas, & his congruas passiones inquirit & demonstrat. Hoc jam supposito (posteà fusiùs comprobando)

bando) quod mixtas attinet, quas appellant Mathematicas, pro naturalis ſcientiæ partibus omnino habendas cenſeo; & totidem eſſe quot ipſa Phyſice partes agnoſcit (niſi quòd plures fortè ſint, ſi merè ποιητικαὶ quales Pictura, Sculptura, Statuaria, Architectura, hiſque affines artes à Phyſica diſcerptæ his adjungantur.) Nec enim hæ mixtæ Scientiæ aliâ ratione Mathematicæ dicuntur, quàm idcircò quòd conſideratio quantitatis ipſis intervenit; & quòd in Geometria demonſtratas (vel propriè demonſtrandas) concluſiones adſciſcunt & applicant ſuæ particulari materiæ, quâ ratione nulla pars eſt naturalis Scientiæ, quæ Mathematicæ titulum ſibi non queat arrogare; cùm planè nulla ſit, à qua conſideratio quantitatis penitus excludatur, adeóque cui non liceat lucis aliquid aut firmamenti de Geometria mutuari. Eſt enim magnitudo communis affectio rerum Phyſicarum, corporum naturæ penitus illigata, corporeis omnibus accidentibus permiſta, & quaſi ſubſtrata, nec non in effectuum quorumcunque naturalium productione primas fermè partes ferens. Suas quæque corpora figuras obtinent, ſuas obeunt locales motiones, quarum interventu ſi minùs omnes, plurimi ſaltem & potiſſimi (& quicunque ferè philoſophicam explicationem admittunt) effectus peraguntur, quibus determinandis & inter ſe conferendis Geometrica ſubinde theoremata deſervire poſſunt & conducere. Quòd ſi calculum hoc ritu ponimus, & Mathematicam nuncupamus quamcunque doctrinam, Geometriæ adminiculo vel egentem, vel utcunque utentem, eatenus ipſa

Medi-

Medicina Mathematicæ pars erit, quia ſicuti
notat Ariſtoteles, ὅτι τὰ ἕλκη τὰ περιφερῆ
βραδύτερον ὑγιάζεται, τοῦ ἰατροῦ εἰδέναι, διότι
δὲ τοῦ γεωμέτρου. h.e. ex Geometria cauſam *1. Anal.*
deſumit medicus, cur orbicularia vulnera, *Poſt. c. 13.*
utpote capaciora aliis, difficiliùs ſanentur;
& quòd propterea filio ſuo præcipiat Hippo-
crates, quo oſſium ſitum, luxationes, contri-
tiones, exemptiones accuratiùs perſpiciat,
ut Geometriæ incumbat. Politice quoque
pari ratione Mathematicis adſcribetur, quod
in ornamentum pacis, & ſalutem in bello
protegendam Geometriæ depoſcat auxili-
um; ad ædes nempe publicas eleganter ex-
truendas, urbes validè muniendas, aquas
commodè derivandas; nec non ad militiæ
munia quævis rectè obeunda, caſtra locanda,
aciem ordinandam, machinas excogitandas,
& uſui adhibendas, unde Plato: Πρὸς γὰρ τὰς *7. de Rep.*
στρατοπεδεύσεις, καὶ καταλήψεις χωρίων, καὶ
συναγωγὰς, καὶ ἐκτάσεις στρατιᾶς, καὶ ὅσα
δὴ ἄλλα σχηματίζουσι τὰ στρατόπεδα ἐν αὐταῖς
τε ταῖς μάχαις, καὶ πορείαις, διαφέρει ἂν
αὐτὸς ἑαυτοῦ γεωμετρικός τε καὶ μὴ ὤν, h. e.
Latinè: *Ad caſtrorum metationes, & occupatio-
nes locorum opportunorum, & ad acies denſo or-
dine ſtruendas, vel longiùs exporrigendas, cæte-
raſque id genus figuras repræſentandas, quibus
diſponi debent exercitus in pugnis vel in itineribus,
permultum ſanè diſtat, utrum quis peritus ſit, an
imperitus Geometriæ.*] Unde ſaltem Tactice,
& Poliorcetice, nec non Architectura quæli-
bet adnumerari debeant Mathematicis. Sed
ut redeamus ad Phyſicam, hujus nullam eſſe
partem dico, cui non implicatur quantitas,
non applicari poſſunt theoremata Geome-

trica; & quæ consequenter non aliquo modo subalternetur Geometriæ; nec ipsam quæ remotissima videtur, Zoologiam excepero: Quid enim? annon in corporeæ machinæ compage perscrutanda certa membrorum figura, apta proportio, debita positio veniunt consideranda? non animalium gressus, volatus, natatus, corpora sua cùm promovendi, tum sustentandi, librandique ratio Geometricas ad leges, exigi expendíque possunt? Neque non aliam quamvis naturæ partem talia multa se objecerint examinanti. Haud diffiteor aliquas esse præ aliis partes Physicæ, quarum negotiis seipsam quantitas frequentiùs intermiscet, & quæ proinde Geometriæ subsidium vehementiùs efflagitent; ut nimirum illa, quæ de cælestibus agit corporibus, quoniam ob nimiam à nobis distantiam præter ipsorum apparentes figuras, magnitudines, intervalla, progressus, & periodos motuum nil fere quicquam de illis planè compertum habere possumus; quo fit ut universa fermè scientia syderum videatur Mathematica; quoniam omnis, quam de illis assequi valemus, cognitio quantitatem respicit, aut inde dependet. Hinc Astronomia cum suis partibus, Systematicâ, (quæ principaliter corporum mundanorum dispositionem, & situs inter se comparatos indagat) Sphæricâ (quæ communem omnibus cælestibus apparentem motum diurnum, ejúsque conjuncta & accidentia persequitur) Theoricâ (quæ singulorum planetarum motus & passiones indè procedentes contemplatur): Quibus subnecti possunt ex his deductæ vel dependentes Chronologia (vel ejus saltem

par

pars τεχνικὴ) quæ ex ſyderum periodicis curſibus temporum intervalla ritè diſpeſcit ac digerit: Gnomonica, quæ ex opacorum corporum umbris diurnæ revolutionis particulas diſcernit, nec non ipſorum lucidorum altitudines, & declinationes rimatur. Cometologia quoque, déque novis ſtellis extra ordinem aliquando comparentibus agens doctrina huc referantur. Quinetiam, cur diverſorum locorum incolis ſyderum lux quoad moram temporis, aut ſpeciem ſuam, aut ſitum differenter obveniat, quia telluris forma Sphærica prorſus in cauſa eſſe deprehenditur, ideò Geographia quoque Mathematicis accenſetur; utpote cui bene conſtituendæ, intelligendæque Geometricæ de ſphæra concluſiones omnino neceſſariæ ſunt. Iiſdémque pari ratione Nautice (vel ars navigandi) attexitur, quæ ſc. ex angulis cum Meridiano factis navis iter dirigit; & è cæleſtibus phænomenis ejus in vaſto pelago locum & diei tempus determinat. Porrò, quoniam animalis viſio per radios à quovis objecti (lucentis aut illuſtrati) puncto deſignabili, rectarum ad inſtar linearum verſus oculi punctum aliquod ubicunque collatum progredientes effici concipitur, & proinde quæ de rectis lineis (& figuris per illas conſtitutis ſeu comprehenſis) demonſtrat Geometria, radiis iſtis poſſint adaptari; inde in Mathematicum cenſum Optice redigitur, cum ſuis partibus, Optica propriè dicta (quæ directæ viſionis accidentia perluſtrat) Catoptrica (quæ ex radiis ab opaco corpore reflexis provenientes apparentias ſpeculatur) Dioptrica, (quæ radiationis à diverſo medio infractæ

consequentias elicit.) Quibus adnectuntur ad visum spectantes artes μιμητικαί; Perspectiva, quæ visibilium objectorum in tabula quavis (præsertim planâ) speciem congruè concinnéque repræsentandi methodum edocet; Graphice, vel Pictura Perspectivæ colorem & umbram adjiciens; Sculptura, Cælatura, Statuaria, aliæque cognatæ. Quòd si perindè comperta foret undulationis aereæ figura, quâ sonus efficitur, & audiendi sensus impellitur, indè nova proculdubiò pars emergeret Matheseos, Acoustices nomine celebranda. Haptice quoque, & Geustice, & Osphrantice pari jure mererentur in hunc ordinem cooptari; si cujusmodi motibus peraguntur istæ sensiones conjecturâ subodorari possent philosophantes. Saltem quòd auditum attinet, quoniam ex chordæ sonoræ certâ sectione, vel ex duarum pariter tensarum longitudine juxta certam proportionem differente, si plectro feriatur utraque, sonorum productorum reperitur secundum gradus acuminis & gravitatis habitudo determinata chordarum proportioni mirificè respondens, & proinde numeris (vel saltem rectis lineis) explicabilis; hinc exoritur pars Mathematicæ, quæ Musica vel Harmonice, vel etiam Canonice dicitur, Arithmeticæ (sicuti loqui amant) subalterna, rectiùs fortassis Geometriæ subordinanda. Adhæc, cùm vis indita plerisque magnitudine sensibili præditis corporibus versus terram directè progrediendi, quæ pondus dicitur, ex quacunque proveniat efficiente causa, de facto limitetur & gradus suos sortiatur ex conspirantibus inter se partim mole propriâ, partim situ partium suarum,

rum, partim distantiâ ab immobili centro motûs sui, circa quod rotantur: Et consimili ratione cùm potentia corporibus istis ponderosis resistendi, illa sustinendi, vel elevandi, vel utcunque loco dimovendi determinetur & dependeat ab iisdem causis; hinc disciplinæ de quiete vel motu ponderum illorum seu absolutè, seu comparatè (h. e. quatenus sibi mutuò contranituntur) consideratorum (Statice sc. & Mechanice, iisque subjectæ vel annexæ Centrobaryce, Isorrhopice & consimiles) Mathematicis adscribuntur; utpote quæ ad istas magnitudines dimetiendas, positiones determinandas, distantias exquirendas Geometriæ subsidium implorent. Quo referri potest ars *αὐτοματοποιητικὴ*, organorum nempe non ab extrinseco impulsu, sed ex innexa gravitate, vel elastica virtute mobilium confectio, & consideratio. Imò, quoniam universè motio localis tum quoad durationem, tum quoad impetum, & intensionem; itémque quoad directionem, & quoad omnimodas ipsius differentias haud aliter æstimari potest in se, vel cum altera motione comparari, nisi ex spatiis, hoc est ex lineis rectis aut circularibus, quas describere vel pertransire possit, ideò pleræque partes physicæ, iisque agnatæ artes, in quibus motus localis partes obtinet præcipuas, inter Mathematicas censentur; quatenus linearum (vel spatiorum) adhibent dimensionem, Geometriæ appropriatam; unde Mathematicis accrescit scientiarum fœcunda seges. Hinc enim de motu naturaliter descendentium doctrina, quâ sc. illa proportione accelerantur; de motu projectorum, qui ex naturali & violen-

to componitur, quam lineam curvam descri-bant; de jactu telorum, & missilium tormentis explosorum impulsu, quas vires habeant, & quomodo disponendæ sunt iis inservientes machinæ, destinatum ut scopum feriant validissimè, certissiméque item de aquis per aëris, vel spiritûs impetum (compressione, rarefactione, attractione, evacuatione, vel quacunque causâ) conceptum in sublime evehendis: Quæ, inquam, de his rebus & similibus dispiciunt. scientiæ particulares Mathematicarum amplificant numerum: (quales Belopoëtice, Balistica, Pneumatice, Hydraulice; hisque affinitate conjunctæ.)

E quibus autumo satis liquidò constare (quod mihi propositum fuerat ostendere) Mathematicam, habitam dictámque vulgo, ipsi Physicæ quasi coëxtendi & adæquari. Nec non simul indicavi (velut obiter, at datâ operâ) quo suo merito quælibet scientia particularis ad Mathematicam dignitatem titulúmque adspiret; & qua ratione Matheseos ambitus eousque excreverit, ut jam (quod de Romana Rep. dictum olim) magnitudine laboret sui. Quinimò jam effectum, ut in vulgi errorem etiam docti consensisse videantur; atque ut quicquid utcunque diagrammate possit exprimi, velutíque ad sensum imagine propositâ adumbrari, id ad Mathesin, ipso facto, censeatur pertinere. At revera mixtæ illæ vel concretæ scientiæ Mathematicæ, quas vocant, unius Geometriæ totidem potiùs exempla sunt, quam tot partes ipsius Matheseos: Quippe quam post exutas particulares circumstantias, admissasque suas hypotheses fundamentales

damentales

damentales & præcipuas. (seu probabili ratione nixas, seu gratis assumptas) evadunt purè Geometricæ. v. g. Posito stellam (hoc est punctum aliquod cæleste) in cœlo (h. e. in spatio indefinitè quanto) per lineam rectam, circularem, ellipticam, vel aliam quamvis, deferri motu respectu puncti alicujus determinati uniformi, vel apparenter æquali, in certò tempore (h. e. cum certa velocitate per numerorum aut linearum rectarum proportionem determinabili) his, inquam, positis, qui consequitur omnis discursus in Astronomia usurpatus evadit purè Geometricus. Quòque simpliciores, & evidentiùs possibiles sunt adsumptæ hypotheses, eò artes istæ ad Geometriam propiùs accedunt: Unde é. g. pars illa mechanicæ, quæ agit de centro gravitatis; & pars Opticæ, quæ vulgò dicitur Perspectiva, inter Geometriæ partes haud malè numerentur; quia nil fere poscunt non concessum & comprobatum in Geometria; nec aliis utuntur quàm Geometricis aut principiis aut ratiociniis. Verùm de his satis pro præsenti instituto. At miretur fortè quispiam cùm Matheseos partes omnino cunctas (aut certè præcipuas) recensere studuerim, quamobrem de Algebra, quam vocant, vel Analytica facultate planè conticuerim. Respondeo non temere factum. Quia nimirum Analysis (eatenus intellecta, quatenus à Geometriæ vel Arithmeticæ pronunciatis & regulis distincti quid innuit) non magis ad Mathematicam, quàm ad Physicam, aut Ethicam, aut aliam quamvis scientiam videtur spectare. Est enim duntaxat pars quædam aut species Logicæ, seu modus qui-

dam utendi ratione circa quæstionum solutionem, inventionémque vel probationem conclusionum, qualis in aliis omnibus scientiis exercetur haud rarò. Quare non est pars, aut species, sed instrumentum potiùs Mathematicæ subministrans; ut neque Synthesis, quæ modus est theoremata demonstrandi analysi contradistinctus, inversúsque. Sed de his posthac differemus luculentiùs, cùm de modis inveniendi, ac demonstrandi Mathematicis agemus de industria. Suppar causa præstitit, ut Logisticen quoque consultò præterirem; nec inter partes Matheseos computarem; quia scilicet hæc nullum habet distinctum, & sibi proprium objectum, sed artificium solummodo quoddam tradat, in Geometria (vel Arithmetica) fundatum, quà magnitudines & numeros certis notis, vel symbolis designandi, quà summas ipsorum & differentias colligendi ac comparandi. Unde minimè constituit partem aliquam Matheseos a Geometria, vel Arithmetica distinctam, sed in ipsis omnino continetur. At graviorem mihi dicam intendi posse sentio, propter ipsam Arithmeticam (hactenus scientiarum habitam ferè potissimam) è mathematum quasi finibus eliminatam; saltem omnino prætermissam; fecisse non inficior, at quo jure, quoniam jam opportunè non licet, proximà in lectione disceptabo.

LECT.

L E C T. III.

LEctione præcedente, cùm de Mathematicarum ſcientiarum partitione diſquirerem, quadantenus aſtruxi Matheſin omnem Geometriæ terminis contineri & circumſcribi. Et quidem de reliquis tum memoratis neminem arbitror vehementer repugnaturum, quin ad Geometriam illæ ſatis commodè reducantur. Ipſam verò Arithmeticam quod è Mathematum cenſu diſpunxerim, & nobiliſſimam ſcientiam ſuo, quem tot ſecula poſſedit, gradu quaſi dejecerim, nunc difficilior incumbit mihi provincia cauſas obtendendi probabiles, atque idoneas. Quanquam obteſtari poſſunt me neutiquam id agere, numerorum ut ſcientiam, ſanè pulchram & perutilem, è Matheſi tollam penitus, aut ſecludam. Abſit. Ipſam verò potiùs ut ſede propriâ dimotam legitimum in locum reponam, nativæque Geometriæ, à qua divulſa eſt, ſtirpi rurſus inſeram & coadunem. Quinimò ne tam illuſtri verendæque refragarer auctoritati, adeóque immane vobis paradoxum obtruderem, religio mihi foret, niſi cùm ſuſceptæ cauſæ confiderem admodum, tum magnopere putarem ex re futurum ipſius Matheſeos, ut Arithmetice Geometriæ nedum naturâ ſimilis & affinis (vel ſoror ejus, juxta vetuſtiſſimi illius Philoſophi Pythagorei Archytæ Tarentini effatum, Ταῦτα τὰ μαθήματα δοκοῦντι ἦμμεναι ἀδελφεά) *Apud Nicomachum 1. Arith.*

φεὰ) sed intimius conjuncta, imò planè eadem, prorsus indistincta habeatur. Etenim evicto numerum (illum saltem quem Mathematicus contemplatur) à quantitate, quam vocant, continua nil quicquam reverà differre, sed ei tantùm exprimendæ declarandæque confictum esse, nec Arithmeticam proinde ac Geometriam circa diversam materiam versari, sed communes uni subjecto proprietates utramque pari quasi passu demonstrare, plurima liquebit inde maximáque in rem Matheseos publicam commoda derivari.
I. Eo quippe primùm perspicietur nullum Geometriæ vel axioma generale, vel specialem conclusionem (quæ scilicet magnitudines respiciant non absolutè sumptas at collatas inter se juxta certas æqualitatis vel inæqualitatis proportiones, hoc est ut mensuris designabiles, & comparabiles inter se) non etiam Arithmeticæ simili ratione convenire: Et vicissim nihil de numeris affirmari, discursu colligi, vel demonstrari posse, quod magnitudinibus non pariter accommodetur & congruat unde cùm affulsura sit eximia lux utrique scientiæ, tum ingens provenerit compendium, sublatâ nempe causâ theoremata suapte naturâ prorsus eadem supervacaneè repetendi, plúsque unâ vice demonstrandi; nec non eadem problemata sæpius ac diversimodè solvendi; quam ad rem innumeræ produci possent instantiæ, & tota proportionum doctrina luculento sit exemplo simul & argumento.
II. Quinetiam, hac admissâ numerorum & magnitudinum coalitione, locuples utrique disciplinæ succrescet accessio, lautum accedet incrementum. Etenim permulta, Geometriæ beneficio

ficio & subsidio; circa numeros theoremata reperire facillimum erit ac demonstrare, alioquin intra vulgares Arithmeticæ limites sistendo vix aut ne vix pervestigabilia, vel demonstrabilia; permulta quoque breviùs & clariùs hinc inveniri poterunt & demonstrari. Ac reciprocè numerorum perspectæ rationes multa Geometriæ theoremata communicabunt perspicuò explicata, validéque confirmata. Exemplo rem illustrabimus uno vel altero. Quòd summa vel series infinita (seu indefinita) numerorum à nihilo crescentium ad certum maximum terminum, juxta rationem radicum quadraticarum numerorum se pariter unitate continuò excedentium (hoc est, se habentium ut 0, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, &c. ad infinitum) subsesquialtera sit summæ totidem æqualium dicto maximo termino; est arithmeticum theorema, sed quod in ipsa arithmetica, nullâ, opinor ratione poterit exactè demonstrari; verùm ex Geometria perspicuè deducitur. Nam si diameter parabolæ cujusvis in partes æquales divisa concipiatur indefinite multas, quæ per puncta divisionum ad diametrum ordinatim applicantur rectæ lineæ (vel parallelogramma æquè alta illis insistentia) illâ ratione progredientur, sicut ostenditur in Geometria; ex istis verò, seu rectis, seu parallelogrammis, conflata parabola etiam ibidem subsesquialtera demonstratur parallelogrammi super eandem basin & æquealti; hoc est summæ compositæ ex totidem rectis vel parallelogrammis æqualibus maximæ rectæ, vel maximo parallelogrammo: Unde, supposito quem astruere cupimus Arithmeticæ

cum

cum Geometria consensu, satis clarè sequitur ejusmodi seriem numericam subsesqui alteram esse summæ totidem æqualium maximo termino. Sed facilius, nec admodum dissimile, proponemus exemplum. Series, vel summa numerorum ab unitate (inclusive) decrescentium ad infinitum vel usque ad nihilum, in ratione tripla continuò (hoc est ut $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$, &c.) se habet ad unitatem ut 3 ad 2. vel, eadem series, exclusâ unitate, æquatur semissi unitatis. Hoc theorema (quod facilitatis & perspicuitatis causâ in certâ ratione, triplâ sc. proposui) etsi demonstrari possit * universaliter; multo tamen clariùs opinor, & expeditiùs, pulchriùs saltem & elegantiùs, adhibendo quantitatem continuam sic ostendetur.

* Sic;
$Z - o \,.\, Z - \alpha :: \alpha \,.\, \beta.$
$Z\beta = Z\alpha - \alpha\alpha.$
$\alpha\alpha = Z\alpha - Z\beta.$
$\frac{\alpha\alpha}{\alpha - \beta} = Z.$

A E F G H Æ Z

Mobile punctum A ponatur ferri per rectam A Z uniformi motu; & punctum E per eandem rectam decurrat etiam uniformi motu, sed velocitate subtriplâ velocitatis, quâ fertur mobile A. Ergo quo tempore mobile A percurrit rectam A E, eo tempore mobile E percurret ipsius A E tertiam partem, puta E F. Item quo tempore prius mobile percurret rectam E F, eodem posterius percurret ipsius EF tertiam partem, puta FG; & sic continuò in infinitum, donec mobile A assequatur ipsum E in puncto Æ. Posito jam quòd AE sit unitas, erit E F, $\frac{1}{3}$; & F G, $\frac{1}{9}$; & G H, $\frac{1}{27}$; & sic porrò ad infinitum juxta pro-

propositam hypothesin; liquet verò, quoniam mobile A triplo velocius ponitur mobili E, quòd recta A Æ decursa ab A tripla sit rectæ E Æ eodem tempore decursæ ab E. Ergo E Æ se habet ad A E, hoc est series decrescens, exclusâ unitate, ad unitatem, ut 1 ad 2: Et A Æ se habet ad A E, hoc est series decrescens inclusâ unitate ad unitatem, ut 3 ad 2. Quod erat demonstrandum. [Generaliter verò conceptum hoc theorema tale fuerit, Series numerorum ab unitate, inclusivè, continuò decrescentium infinitè, seu ad nihilum, in quavis proportione, se habebit ad unitatem, ut antecedens (vel major terminus) proportionis ad excessum antecedentis supra consequentem. Vel, eadem series, exclusâ unitate, se habebit ad unitatem, ut consequens (vel minor terminus) proportionis ad excessum antecedentis supra consequentem. Nam supposito præcedente discursu, quòdque ratio data sit quæ inter R, & S; & quòd, ut isthic, A E sit unitas; quoniam A Æ . E Æ : : R . S. erit dividendo A E . E Æ : : R-S . S. hoc est, unitas ad propositam seriem, ut excessus terminorum proportionis ad minorem terminum: Et rursus, ob A E . E Æ : : R . S. erit per rationis conversionem, A Æ . A E : : R . R-S; hoc est, proposita series, inclusâ unitate, ad unitatem ut major terminus proportionis ad excessum ejus supra minorem.] Adeò facilè deduci possunt ex consideratione Geometrica Arithmeticæ conclusiones, alioquin ex se satis intricatæ, & investigatu difficiles. — Alterius sic Altera poscit opem res, & conspirat amicè. Aliud porrò commodum ex hac emer- III.

emerget conjunctione; quòd exinde scilicet evadet perspicuum (contra quàm haud ità pridem non nemo, magni vir sed infelicis ingenii, quò Geometrica sua sphalmata velo quopiam obduceret, & facilem erratorum elenchum declinaret, haud dubitavit asserere) nullum omnino ratiocinium Geometricum valere, non cum Arithmetico calculo exquisitè consentiens; & proinde commissos in Geometria paralogismos posse per computationem Arithmeticam ut facillimè, ità certissimè, justissiméque examinari & refutari; nec non veras conclusiones Geometricas Arithmetici calculi Suffragio confirmari, legitimas demonstrationes illustrari; quippe cùm hoc præstrato & stabilito, discursus Geometricus ab Arithmetico calculo nedum dissentiat, at neutiquam differat. Ista, ne plura nunc commemorem, in rem Mathematicam emanabunt commoda, sublato Geometriæ, & Arithmeticæ discrimine, vel identitate constitutâ & adsertâ. Atqui rem ità se habere, fidem penè faciat, validam saltem injiciat suspicionem, ipsum Geometriæ nomen (vel generalius illud nomen Metrices, quod præ Geometrices vocabulo Platoni arrisit haud immeritò) quid enim obsecro denotat τὸ μετρεῖν (metiri) nisi magnitudinem numero notificare, vel exprimere. Μέτρον γάρ ἐστι (inquit Aristoteles) ᾧ τὸ ποσὸν γινώσκεται· γινώσκεται δ' ἢ ἑνὶ, ἢ ἀριθμῷ τὸ ποσὸν, ἢ πᾶν h. e. *Mensura est, quo quantum dignoscitur*:

Quoniam Arithmetica instrumentum est omnis supputationis, & numeri sunt termini, quibus qualibet magnitudo significatur, non dubium est, quin per numeros fieri possit omnis magnitudinis calculus. Maurolycus in Prolegom. ad Lib. II. Arithmet.

X Metaph. cap. 1.

dig-

dignoscitur autem quantum, quà quantum, vel unitate, vel numero. Itaque si Geometria nomine suo numerum involvit, quidni debeat ipsum reverâ continere? Accedit quod τὸ ποσὸν, quo sc. unico vocabulo designari solet universale Matheseos objectum, peculiarem respectum includit ad numerum, quod indicio sit magnitudinis & numeri conceptus vix mente posse disjungi, cùm nec nomine potuerint separari. Verum liquidiùs apparebit hoc ex naturâ numeri paulò diligentiùs excussâ perpensâque. Quocirca 1. Adverto, 1.
quòd nullus omnino numerus ex se quidquam distinctè significet, cuivis determinato subjecto conveniat, ullam rem certò denominet. Etenim unusquisque numerus quodvis unum quantum æquo jure denotet & denominet: Ac quilibet unus numerus omni quanto pariter attribui potest; ut v. g. linea quævis A possit indifferenter appellari unitas, duo, vel tres, vel quatuor, vel alterius cujusvis numeri cognomentum adsciscere (vel si mavis simplex, duplex, triplex, vel quomodocunque multiplex dici poterit) quatenus indivisa manere, bisecari, trisecari, quadrisecari, vel alio quovis modo secari potest (aut ex quolibet partibus aggregari, seu componi) ita pari modo quivis idem numerus, ut 5, potest attribui quibuscunque quantis A, B, C, & aliis infinitis, quatenus illa constare possunt ex 5 partibus. Unde patet numerum quemvis haud quicquam designare certi, vel absoluti, sed utcunque pro arbitrio aptum natum esse cuivis quanto designando. 2. Ob- 2.
servo, Prout singuli numeri seorsim & absolutè spectati nihil certi significant, itá duos
&

(vel

(vel plures) numeros inter se collatos nullam ex se determinatam habitudinem, seu proportionem sortiri, aut indicare. Ternarius ex. gr. ad binarium nec ex se sesquialteram, nec ullam aliam certam proportionem indigitat. Sit enim linea A tripalmaris; ex quo A vocetur tres, hoc est tres palmi; & linea B bipedalis; unde B nuncupetur duo, hoc est duo pedes; liquet illum ternarium ad hunc binarium non habere proportionem sesquialteram (nec enim ternarius palmorum ad binarium pedum se habet ut 3 ad 2) multo minùs aliam quamvis his numeris expressam, licèt habeat aliunde. Imò patet binarium istum, quo linea bipalmaris denominatur, illi binario, quo bipedalis effertur linea, neutiquam exæquari. Similiter 3. Adnoto, Numeros ex se nec invicem addi posse, nec subtrahi, vel ut summam aliquam componant, vel ut excessum, seu differentiam commonstrent. Ut in exemplo præcedenti ternarius ille lineam exprimens tripalmarem binario lineam bipedalem repræsentanti, nec adjici potest ut constituatur summa 5 seu palmorum seu pedum, seu cujuslibet alterius mensuræ, ex istorum numerorum significatione notificatæ. Nec si subducatur ex illo ternario binarius hic, emerget quævis explicita differentia, vel excessus dignoscibilis. Paritèrque si tres anguli quatuor rectis lineis adjungantur, nulla summa conflabitur: Aut, si ternarius equorum ex angelorum quinario detrahatur, nulla resultabit differentia. Unde provenit igitur (dices) numerorum certos ad usus determinatio? Quòd ipsi definitam innuant rationem, quòd sibimet addi soleant

&

& ſubduci? Reſpondeo, quòd hæc numeris ſubinde conveniant, ex rerum quibus attribuuntur conditione ſuboriri. Nempe ſi res quibus ipſi denotandis inſerviunt, homogeneæ ſint & cognomines, & propterea comparatæ mutuam inter ſe proportionem habeant, adeóque poſſit una alterius adjectione augeri, vel abſtractione diminui, tum ipſas denominantibus numeris ſua impertiunt attributa, eaſdem proportiones, ſimilia incrementa vel decrementa. Ut quoniam linea bipedalis cum linea tripedali congenerem naturam, idémque nomen obtinet, ideò binarius, quo denominatur & ſignificatur illa, ad ternarium quo denominatur hæc, certam innuit proportionem ſubſeſquialteram; eandem ſcilicet quam habent ipſæ lineæ, quas denominant; atque idcirco binarius ille huic appoſitus ternario quinarium efficit (quinos nempe pedes) & ille ſubtractus ab hoc relinquit unitatem, pro exceſſu vel differentia. Eadémque fermè ratione, quæcunque numeris apud Arithmeticos convenire probantur attributæ, numeris illa non tam abſtractis & ex ſe, quàm concretis, & propter rerum, quibus attribuuntur, conditionem conveniunt. Quòd igitur quidam apud nos doctiſſimus, & merito ſuo celeberrimus Mathematicus Geometriam aſſerit Arithmeticæ quaſi ſubordinatam, & Arithmetices univerſalia effata rebus ſuis applicare; item res Arithmeticas altiores eſſe, magiſque abſtractæ naturæ, quàm Geometricas, hác potiſſimùm ratione fretus; *Quoniam*, inquit, *non eo quòd linea bipedalis addita bipedali facit quadrupedalem, ideò duo & duo faciunt quatuor, ſed potiùs quia hoc, ergo illud:* Reſpondeo, & regero: Quòd

D. Wallis Arithm. pag. 69.

Quòd linea bipedalis addita lineæ bipalmari non conficiat lineam vel quadrupedalem, vel quadripalmarem, vel utcunque quaternario denominatam, unde evenit, si abstractè, hoc est universaliter & absolutè, verum sit 2 + 2 conficere quatuor? Dices; quia numeri isti non applicantur eidem materiæ vel mensuræ: Atqui hoc ipsum volui, ac indè deduco non ex abstracta numerorum ratione 2 + 2 facere quatuor, at ex conditione materiæ cui applicantur; hoc est quia magnitudo quælibet binarii nomine donata magnitudini adjuncta cognomini pariter à binario denominatæ magnitudinem efficit à quaternario denominabilem: Nec certè fingi potest quidvis absurdius, quam magnitudinum proportiones inter se à numerorum quibus exprimi possunt habitudine dependere. Quanquam alioqui quòd 2 + 2 faciant 4, cùm isti numeri homogeneis mensuris applicantur, non tam scientiæ cuivis Arithmeticæ debetur, quàm ipsorum vocabulorum significationi communi usu stabilitæ, per quam sc. 4, seu voce notatus, seu charactere notatus idem signat quod bis duo. Sicuti revera totum illud Arithmeticæ vulgaris artificium, quodcunque est, non aliunde deducitur, aut aliter demonstratur; quis enim aliter inferat aut probet, quòd 3 + 5 exæquent 8; vel 8 — 3 relinquat 5, quàm ex istorum vocabulorum arbitrario significatu? Sed ut hæc patescant
4. ampliùs. 4. Animadverto, rerum quibus attribuuntur numeri magnopere diversam fore conditionem. Alio nempe pacto tribuuntur numeri rebus quantis certam mensuram (hoc est determinatam aliquam magnitudinem,

tudinem, ad quam ejusdem generis aliæ referantur) designantibus, alio autem rebus non nisi genericà quadam ratione convenientibus inter se. Ex. g. cum dico, tres ulnæ; singulæ unitates, ex quibus componitur iste ternarius, æquantur sibi mutuò, paresque sunt singulæ aliis unitatibus quemcunque numerum ingredientibus, quo longitudo aliqua similiter ex ulnis composita denominatur. Unde tales numeri proportionem servant perpetim eandem inter se, quam ipsæ magnitudines, quas denominant, iisque proinde exprimendis apposite deserviunt, atque conducunt. At verò cùm enuncio, tres montes, vel tres angeli, vel tres lineæ, vel demum tres numeri; nullam habent necessariò singulares unitates ex quibus componitur iste ternarius, æqualitatem inter se; ac saltem convenientiam vel similitudinem quandam generalem in ratione communi montis, aut angeli, aut lineæ, aut numeri. Quando, inquam ex. c. dico tres numeri 5, 7, 9, singuli isti numeri, quatenus illi tres sunt, rationem habent unitatis, & liquet illos inæquales esse, sed omnes in ratione numeri conspirare. Sin alter adsciscatur numerorum ternarius, puta 10, 15, 20; non erit ille prior ternarius æqualis huic ternario. E qua consideratione duplex emergit quasi genus numeri, quorum illud appellari possit Mathematicum (quoniam ipsum Mathematici præsertim contemplantur, ac adhibent ad magnitudinum dimensiones exprimendas & comparandas inter se; eisque magnitudinum proprietates quadrant, & Mathematicæ conclusiones applicantur) hoc verò transcendentale vel

Metaphysicum; tum quia tribuitur omnibus indiscretè (etiam ex partibus quantitatis, heterogeneis, imaginariis, privativis; dicimus enim duo puncta, 3 dimensiones, 4 chimæræ, 5 prædicabilia, 10 cæcitates) tum quia deprehendi potest hujusmodi numerorum aliqua notio, non modò Geometriæ prævia, sed vel ipsi Arithmeticæ præsupposita: Ut cùm dicimus non modò triangulum tribus lateribus concludi; sed & numerum planum ex duorum in se numerorum, solidum ex trium in se multiplicatione definimus. Unde patet argumenti solutio, quo Nichomachus Arithmeticam naturâ priorem Geometriâ conatur adstruere; quia scil. Geometria numeros usurpare solet & necesse habet in primis figurarum definitionibus, comparationibus, & proportionibus mutuis explicandis; ut cùm in ea triangulum, quadratum, pyramis, cubus, reliquæque figuræ ex laterum vel angulorum numero definiuntur; & cùm quadratum diametri duplum ostenditur quadrati ex latere; cùm cylindrus coni æquè alti super æqualem basim constituti triplus demonstratur; & in similibus: Ex dictis enim promptum erit respondere Geometriam, pariter ac ipsam Arithmeticam, quos vel in definitionibus suis extruendis, vel in ratiociniis utcunque suis enunciandis, adhibet numeros transcendentales, eos vel ex usu communi (penes quem jus est & potestas numeris juxta ac aliis rebus nomenclaturas affigendi) vel saltem ex prima philosophia mutuari, ad quam pertinet generalissimas rationes rerum considerare, ac definire; unde videmus multùm & sæpe agi de numeris, in Philosophi Metaphysicis.

Quan-

Quanquam alioqui fatendum sit, perfectam Geometriam & suis omnibus numeris absolutam, Arithmeticâ indigere, veruntamen haud velut scientiâ totaliter à se diversâ, ac alienâ, sed ut parte sui (sicut postea videbimus) quomodo ad stereometriam (doctrinam solidorum) quæ pars est Geometriæ magìs composita, præsternenda requiritur Empedometria (doctrina planorum) pars ejusdem naturâ prior & simplicior.

Nec minùs hinc liquet quid responderi possit prædicto doctissimo viro sic disputanti: *Est assertio illa de æqualitate numeri quinarii cum numeris binario & ternario conjunctis, assertio generalis, quibuscunque aliis rebus non minùs quàm Geometricis applicabilis; nam & angeli, duo & tres sunt angeli quinque.* (*Pag. 73. Arithm.*) Respondeo breviter: 1. Ut jam ante, quòd 2 angeli + 3 angeli faciant 5 angelos, provenire non ex abstracta ratione numerorum, sed ex eo quòd uterque numerus, binarius ille & ternarius, ejusdem generis & nominis enti tribuatur. 2. Quòd isti numeri, quatenus angelis tribuuntur, sint transcendentales, non aliquam singulorum angelorum inter se æqualitatem propriè dictam, at naturæ duntaxat similitudinem innuentes; adeóque ad Mathematicam considerat-ionem minimè pertineant. Cæterum hanc, quam subnotavi distinctionem numerorum acutè perspexit, & disertè prodidit Plato, in Philebo; Recitari merentur ejus verba: (*Pag. 399. Fic.*) Ἀριθμητικὴν — ἆρ' οὐκ ἄλλην μέν τινα τὴν τῶν πολλῶν φατέον, ἄλλην δ' αὖ τὴν τῶν φιλοσόφων; — οὐ σμικρὸς ὅρος, ὦ Πρώταρχε. Οἱ μὲν γάρ που μονάδας ἀνίσους καταριθμοῦνται τῶν περὶ ἀριθμόν· Οἷον στρατόπεδα δύο, καὶ βοῦς

δύο. Καὶ δύο τὰ σμικρότατα, ἢ τὰ πάντων μέγιστα. Οἱ δ' οὐκ ἄν ποτε αὐτοῖς συνακολουθήσειαν, εἰ μὴ μονάδα μονάδος ἑκάστης τῶν μορίων μηδεμίαν ἄλλην ἄλλης διαφέρουσαν τις θήσει. h. e. *Annon Arithmeticam aliam vulgi, aliam Philosophorum statuamus oportet? Siquidem non exigua est discrepantia. Vulgo quippe eorum, quæ numeris exprimuntur, unitates dinumerant inæquales, veluti duo castra, duo boves; & duo quævis seu minima, seu etiam maxima omnium. Verùm philosophi nunquam ista assequantur, nisi quis unitatem singularum partium singulæ alteri unitati posuerit æqualem.* Ità Plato numeros istos, ex unitatibus inæqualibus conflatos, ad vulgus rejicit, alios philosophis, hoc est Mathematicis, adjudicat; id quod forsan ex antiquioribus Pythagoreis observatum hauserit; ut innuere videtur Aristoteles, ex illorum, opinor, sententia proloquens: Ἐν γὰρ τῷ Μαθηματικῷ ἀριθμῷ οὐδὲν διαφέρει οὐδεμία μονὰς ἑτέρα ἑτέρας. Ecce Mathematicum numerum, eúmque ex minimè disparibus inter se unitatibus constitutum. Sed ut adhuc rem propiùs attingam; & ipsum controversiæ quasi jugulum petam.

Met. XII. cap. 6.

5. 5. Animadverto & assero, Quòd numerus Mathematicus (qualem mox descripsimus, & de quo præsertim sermonem instituimus) etsi possint etiam quæ dicentur per justam analogiam transcendentali quoque numero quadantenus applicari (quatenus naturæ similitudo, est veluti quædam æqualitas, aut affinis æqualitati) quòd, inquam, numerus Mathematicus non sit aliqua res existentiam habens sibi propriam, & revera distinctam à magnitudine quam denominat,

ſed ipſius tantummodo magnitudinis certo pacto conſideratæ nota quædam vel ſignum; quatenus illa nimirum à mente noſtra concipitur vel ut prorſus incompoſita, vel ut compoſita certis ex partibus homogeneis æqualibus (quarum ſingulæ concipiuntur incompoſitæ, & unitatis nomine donantur) vel ut rationem innuens ad alias magnitudines itidem certo modo compoſitas. Etenim ut hunc noſtrum conceptum exponamus, & declaremus, magnitudinem, iſtam certi numeri vocabulo vel charactere deſignamus; qui proinde numerus nihil eſt aliud quam nomen aut ſymbolum magnitudinis iſtius taliter apprehenſam. Hæc generalis eſt natura, vis, & ratio numeri Mathematici: Verùm ſpecialius quilibet numerus (effabilis aut rationalis quem vocant) diſtinguitur ac internoſcitur ab alio, conſequenter ad actus mentis magnitudines alias atque alias ex una aliqua, quam incompoſitam concipit, per repetitionem ejus (vel ei æqualis adjectionem) continuò ſucceſſivam componentis, aut compoſitam cogitantis. Quæ repetitio primùm mente peracta, tum ſermone prolata dicitur numeratio.

Optimè in hanc ſententiam Ariſtoteles. Ἀνάγκη ἀριθμεῖσθαι τὸν ἀριθμὸν κατὰ τὴν πρόσθεσιν· Οἷον τὴν δυάδα, πρὸς τῷ ἑνὶ ἄλλου ἑνὸς προστεθέντος, καὶ τὴν τριάδα ἄλλου ἑνὸς πρὸς τοῖς δυσὶ προστεθέντος, καὶ τὴν τετράδα ὡσαύτως. Ut cùm magnitudinem A mente repeto ſemel, aut illi æqualem alteram adjectam concipio, magnitudinem illam, quam concipitur ità compoſita, deſigno nomine, vel charactere binarii; quòd ſi magnitudinem *Met. XIII. cap. 7.*

nitudinem eandem A adhuc recogito, vel alterâ vice superadjicio priùs conceptæ magnitudini, binarii notâ designatæ, conceptus efficitur alterius compositæ magnitudinis, quam itidem enuncio nomine, vel describo charactere ternarii. Atque ità porrò de reliquis. Sed de generali numeri ratione quæ supra diximus, exemplo nonnihil elucidemus. Sit e. g. linea quævis A; huic nullus ex parte rei numerus peculiariter competit; at si cogitemus ipsam ex aliqua linea per trinam sui repetitionem, modo exposito, componi (vel quod eódem recidit, in tres æquales partes fore divisibilem; idem enim est ex tribus æqualibus componi, quod in tria æqualia resolvi posse) ea propter ipsam appellabimus tres (vel tres tertias ipsius A) & congruo ternarii charactere denotabimus. Sin concipiamus eandem A ex septem æqualibus lineis aggregari (vel in 7 æquales lineas posse distribui) ex qualibus iisdem particulis decem altera linea B composita (seu in totidem illas resolubilis) censetur, hinc linea A vocabitur septem vel septem decimæ partes ($\frac{7}{10}$) lineæ B. Quòd si eadem linea A nullatenus aut composita aut divisa cogitetur, unitatis ipsa gaudebit nomine & charactere. Sin adhuc apprehendatur dicta linea A ceu media proportionalis inter lineam quamvis B ex duabus lineis æqualibus conflatam (bisectámque æqualiter) & unam istarum æqualium linearum (hoc est inter totam B, & semissem ejus) vel inter quamvis rectam C, & duplam ejus; propter istum conceptum linea A designabitur nomine, vel charactere radicis secundæ (vel lateris quadrati, $\surd 2$) nu-

numeri $\frac{1}{2}$, vel numeri 2, respectivè; ut sit nempe radix $\frac{1}{2}$B ($\sqrt{^2}\ \frac{1}{2}$B) vel radix 2C ($\sqrt{^2}$ 2C). Ex quo proinde, 6. Sequitur 6.
advertendum tres esse (præter unitatem ipsam, quæ numerorum veluti fons est ac origo) differentias & quasi species numerorum; hoc est, integrorum, fractorum, & radicalium vel surdorum, quos vocant. Quorum integri quidem nomina sunt vel symbola magnitudinum, compositionem ipsarum subindicantia certis ex partibus æqualibus (quarum unaquæque simplex censetur & nominatur unitas) ut si magnitudo A conflettur ex sex partibus æqualibus (vel ex una sexies repetita) appellabitur A sex. Fracti verò (quibus accenseo mixtos, qui constare possunt ex integro & fracto) notæ sunt cujuscunque magnitudinis itidem innuentia compositionem ejus ex partibus æqualibus, non quidem absolutè, sed ipsam comparando cum alia magnitudine composita ex aliquot partibus, quæ prioris partibus æquales sunt, & cognomines: Vel, numeri fracti sunt symbola cujuscunque magnitudinis certo modo compositæ æqualiter, exhibentia proportionem ejus ad alteram magnitudinem, ex iisdem æqualibus partibus compositam. Ut si A componatur ex 6 partibus æqualibus, & B ex totidem iisdem novem, erit A sex nonæ partes ipsius B ($\frac{6}{9}$ B) vel A se habebit ad B, ut sex ad novem. Eadem nempe magnitudo, unitatis nomine nuncupata, sexies accepta componit A, novies verò sumpta constituit B. Numeri verò radicales, vel surdi notæ sunt magnitudinis cujuslibet, commonstrantes ipsam esse proportione qualitercunque mediam

mediam inter quamlibet aſſumptam magnitudinem homogeneam, æqualiter compoſitam ſecundum exigentiam appoſiti numeri ſeu integri ſeu fracti, & partem ejus unitatis vice fungentem (vel quod perinde eſt, inter acceptam quamvis magnitudinem ſimplicem ac indiviſam, & propterea unitatis vicem obeuntem, ac aliam ita prout adjunctus exigit numerus multiplicatam) ut radix ſecunda, vel quadratica, numeri 3, denotat mediam proportionalem inter quamvis aſſumptam magnitudinem, & ipſius triplam. Et radix tertia, vel cubica, ternarii deſignat primam ex duabus mediis proportionalibus inter quamvis aſſumptam magnitudinem, & triplam ejus. Et radix quarta (vel quadrato quadratica, quam etſi minùs commode ſolent appellare) numeri 5, ſignificat primam ex tribus mediis proportionalibus inter quamvis magnitudinem & quintuplam ejus, & ſic pariter de cæteris. Quòd verò ſpectat ad ſurdos hoſce numeros (quos & irrationales, ineffabiles, irregulares, inexplicabiles, nullo ſuo merito, & quaſi per convicium atque calumniam appellitant) illos complures propriè numeros eſſe negant, & ab Arithmetica ſecluſos ad aliam, (quæ tamen nulla eſt) ſcientiam, Algebram nempe, ſolent ablegare. Quo pacto ſuam Arithmeticam membro demutilant ampliſſimo, & utiliſſimo (ſæpiùs enim, dum magnitudines metimur, & inter ſe comparamus, ad hoſce ſurdos, quàm ad rationales quos vocant numeros computando devenimus.) Mihi verò minimè dubium eſt, quin hi numeri pari jure numeri cenſendi ſint, & æquè ſpectent ad numero-

rum

rum ſcientiam, ac alii quivis integri vel fracti; quum pariter apti ſint, & juxta neceſſarii magnitudinibus exprimendis, comparandis, determinandis (in quo tota numeri ratio, vis, uſus conſiſtunt, ut toties monuimus) & cùm nulla ſit generalis numeri proprietas, aut operatio numeris conveniens integris vel fractis, quæ & non & his æquè congruat. Nam e. g æque capio quid ſignificet radix quadrata trium ulnarum, ac quid denotant tres ulnæ, vel $\frac{1}{3}$ ulnæ. Et illam pariter, ex vi ſignificationis ſuæ, ac has reipſâ poſſum exhibere. Nam aſſumptâ rectâ A, quæ æquetur uni ulnæ, & alterâ B tres ulnas exæquante, inventâque inter has mediâ proportionali, modo in Geometriâ commonſtrato, erit hæc inventa recta quæ deſignatur radice quadrata trium ulnarum. Poſſunt & hi numeri, ex certiſſimarum regularum præſcripto, ſibi mutuò adjici, & ſubtrahi; duci in ſe; ſibi applicari (vel à ſe invicem dividi) & quocunque modo ſupputari, menſurari, proportiones magnitudinum exprimere. &c. Quare nulla eſt ratio cur pro numeris habendi non ſint, aut ex Arithmetica debeant eliminari. Atqui ſatis oſtendunt hi numeri (quos proinde non incongruè Geometricos appellat Stevinus) numerum à magnitudine nihil differre reipſâ; quos certè nec ipſâ mente putem abſtrahi poſſe ab omni magnitudine. Quid enim abſtracte ſignificet $\sqrt{2}$? An radicem abſtracti numeri 2? At hic numerus illo pacto nullam radicem habet (hoc eſt nullus numerus integer vel fractus in ſe ductus efficit 2) an mediam proportionalem inter 1, & 2? At nullus

nullus omnino talis datur numerus medius. Ad magnitudinem igitur omnino recurrendum eſt, ut hic numerus quid deſignet mente concipiatur. Nam etſi inter numerum 1, & numerum 2, nullus datur medius proportionalis numerus, inter magnitudinem tamen unitatis nomine ſignificatam, & magnitudinem binario denominatam, datur media magnitudo proportionalis radicis binarii nomine commodè deſignanda. Idem arguunt numeri fracti, præcipuam fermè partem conſtituentes Arithmeticæ, utpote qui compoſitionem ac diviſionem (proprias affectiones magnitudinis, nec aliis rebus, niſi ſecundario adjunctæque magnitudinis gratiâ, competentes) intimè connotant, implicántque. Qui verbi gr. dicit aut concipit $\frac{2}{3}$, nihil omnino dicit aut concipit aliud præterquam magnitudinem aliquam ex duabus componi, qualibus ex tribus altera magnitudo componitur; vel aliquam magnitudinem in tres æquales particulas dirimi, de quibus duas aſſumptas concipit aut enunciat. Nec aliter integri numeri magnitudines exprimunt & repræſentant; compoſitionem quippe vel diviſionem etiam hi conceptu ſuo involvunt & conſignificant. Ex quo obiter perſpicere licet quid judicandum ſit de aliquoties memorati egregii viri ſententia; qui ſc. ut Arithmeticam Geometriâ multo latiùs extendi faciat manifeſtum, univerſam Algebram Geometriæ abjudicatam addicit Arithmeticæ; æquationes Algebricas altiùs aſcendere ſtatuit, quàm Geometricas; negátque Geometriam tot ſuppeditare dimenſiones, quot Arithmetica gradus oſtentat, & in illam

ſen-

ſententiam pluſcula. Quæ tamen facillimè diſcuti poſſunt omnia, dicendo, per iſtas æquationes (vel dimenſiones) Algebraicas, gradúſve Arithmeticos vel omnino nihil intelligi, nil revera ſignificari; at omnes imaginarias eſſe Chimæras, & mera τερετίσματα; vel aliquid ipſis in Geometria reſpondere, quod ſignificent & repræſentent. Sicut revera de facto nullus eſt quiſquam numerus, nulla poteſtas Algebrica, nullus gradus Arithmeticus, cui non reſpondeant infinitæ, quovis in genere, magnitudines, quas illi numeri repræſentant & exprimant appoſitè. Inſtantiæ cauſâ proponatur quadrato quadratum (vel quarta poteſtas) numeri ternarii; vis hanc poteſtatem exhiberi Geometricè? Sumatur utcunque magnitudo quævis (perinde fuerit an lineam, ſuperficiem, aut ſolidum accipias, at) ſimplicius erit ſi capiatur recta linea, puta A. Hujus autem tripla ſit B; & continuetur ratio ipſius A ad B ſic ut 5 rectæ A, B, C, D, E, ſint continuò proportionales; eritque E recta per ternarii quadrato quadratum (vel quartam poteſtatem) denotabilis. Nam ſi a dicatur 1, erit B, 3; & C, 9; & D, 27; & E, 81; hoc eſt quadrato quadratum numeri 3. Habetur igitur quadrato quadratum Geometricum numeri 3, vel lineam B, quam iſte numerus deſignat. Pari ratione quilibet Arithmeticus gradus, vel Algebrica poteſtas Geometricè poteſt exhiberi. Nihil igitur validi continent ejuſmodi ratiocinia. Poſſem huc in hanc mentem plura: Sed piget, extra ordinem, in re tam liquida diutiùs immorari. Quòd vero Philoſophus Arithmeticam pronunciet accuratiorem

Τὰ εἴδη χαιρέτω· Τερετίσματα γάρ ἐστιν. *Ar. I. Poſt. c.* 28.

I. Met. c. 2. rem Geometriâ: Αἱ γὰρ (inquit) ἐξ ἐλαττόνων ἀκριβέστεραι τῶν ἐκ προσθέσεως λεγομένων, οἷον ἀριθμητικὴ γεωμετρίας· Et alibi explicatiùs: *I. Anal. Post. c. 27.* Ἡ ἐξ ἐλαττόνων (ἐπιστήμη ἀκριβεστέρα) τῆς ἐκ προσθέσεως, οἷον γεωμετρίας ἀριθμητική· Λέγω δὲ ἐκ προσθέσεως, οἷον μονὰς οὐσία ἄθετος, στιγμὴ δὲ οὐσία θετός. Et eum exponens Proclus: *Initio secundi Commentarii.* Ἀριθμητικὴ μὲν ἀκριβεστέρα γεωμετρίας· Αἱ γὰρ ἐκείνης ἀρχαὶ τῇ ἁπλότητι διαφέρουσι· Ἡ μὲν γὰρ μονὰς ἄθετός ἐστιν, ἡ δὲ στιγμὴ θέσιν ἔχουσα, καὶ ἀρχαὶ μὲν Γεωμετρίας (legendum ἀρχὴ) ἡ στιγμὴ προσλαβοῦσα τὴν θέσιν, ἀριθμητικῆς δὲ ἡ μονάς. Ista nec veritati consentanea sunt, & infirmissimo tibicine nituntur omnia. Quæ enim scientia Geometriâ esse poterit accuratior? Quænam sibi præstruat evidentiora vel certiora (addo vel simpliciora) principia Geometricis pronunciatis? Vel in eliciendis conclusionibus suis Logicam exerceat strictiorem, & rigidiùs accuratam? At simplicior est, inquiunt Aristoteles & Proclus, unitas Arithmeticæ (rectiùs numeri dixissent) principium, quàm punctum, quod est principium Geometriæ (vel magnitudinis potiùs). Quod punctum implicet positionem, unitas non item: *IV. Met. cap. 6.* Τὸ μηδαμῇ (inquit Aristoteles) διαιρετὸν κατὰ τὸ ποσὸν στιγμὴ καὶ μονάς· Ἡ μὲν ἄθετος, μονάς· Ἡ δὲ θετός, στιγμή. Verùm imprimìs deterrima est, & pessimas in Mathesin derivat consequentias ista puncti Geometrici cum Arithmetica unitate collatio: Nam unitas reverà parti cujuslibet magnitudinis aliquotæ respondet, non puncto: Ut si linea dividatur in sex partes æquales, sicut ista tota linea respondet numero sex, ita

quæ

quælibet particula sexta respondet unitati, minimè autem puncto, quod nulla pars est istius rectæ. Et punctum rectè dicitur indivisibile; unitas verò nequaquam; (nam v. g. quomodò $\frac{2}{6}+\frac{4}{6}$ æquatur unitati, si unitas indivisibilis est, & incomposita, & instar puncti se habens) quin potiùs sola unitas propriè divisibilis est, & ex unitatis divisione procreantur numeri. Multo veriùs & tutiùs (ut postea monstrabimus, cùm de puncto Geometrico se præbebit occasio differendi) punctum Geometricum cyphræ, vel nihilo Arithmetico comparetur; quæ cipra revera terminus est numeri, finiens unumquemque numerum, & numeris intercedens se proximè consequentibus, non verò pars ejus; quæ numero apposita non auget ipsum, nec ablata minuit; à quâ desumitur initium computandi, cùm ipsa non computetur, quæque præcipuas Geometrici puncti proprietates planissimè refert. Quòd vero de positione dicitur, nec id usquequaque sanum est & solidum; nam punctum universaliter acceptum haud minùs indeterminatum est, & expers positionis, quam unitas itidem sumpta universaliter: Singulariter autem accepta unitas definitam æquè positionem, & reliquas singulares includit circumstantias, ac ipsum singulare punctum. Denique non diversa, nedum impar est harum scientiarum (Arithmeticæ & Geometricæ) ἀκρίβεια; sed prorsus eadem; ex iisdem haustæ principiis; circa res easdem occupata. Huc denique spectantia, & hinc consequentia plurima possem attexere; sed

Nè

Nè rem longiùs extraham & tædio sim; nemini non satis liquebit, opinor, hæc quæ suggessimus & talia serio perpendenti, numerum (qualis saltem à Mathematicis pertractatur) ab ipsa continua magnitudine haudquaquam reipsa differre; nec aliunde quas habere videtur proprietates (compositionem, divisionem, proportionem, atque consimiles) quàm ab illa, vel propter illam, quatenus illius vicem gerit & personam, quasi sustinet, adipisci; nec proinde numerum esse speciem quantitatis magnitudini contradistinctam, nec objectum alicujus scientiæ à Geometria (quæ circa magnitudinem versatur universam) diversæ, sed ipsius quæcunque sit contemplationem ad Geometriam pertinere, eíque includi. Proinde nec inconsultè fecisse στοιχειωτὴν nostrum (quicquid obstrepat Ramus illum sugillans hoc nomine) qui Geometricis elementis Arithmeticas inseruerit speculationes; imò potiùs rei Mathematicæ plurimùm interesse, nè scientiæ istæ seu naturâ disparatæ segregentur aut divellantur à se invicem; adeóque de ipsis promeriturum egregiè, qui commodam in Geometria sedem assignaverit Arithmeticæ. * Sed hìc pedem sisto.

* *Qualem certè videtur antiquitùs obtinuisse; siquidem vel ipse magnus Orator de Geometria obiter tractans, de recepto opinor usu potius quàm ex ingenio suo dicat,* Geometriam in numeros atque formas esse divisam. *Quintil. T.* 10.

LECT.

LECT. IV.

DE Mathematicarum Scientiarum partitione quæ mihi viſa ſunt ex uſu propoſui. Quam verò plerique tradunt ipſarum diviſionem in theoreticas & practicas conſultò prætermiſi, ceu parùm probam & minùs neceſſariam; utpote quæ non diverſas ſcientias, ſed ejuſdem duntaxat ſcientiæ diverſos innuit reſpectus. Enimverò, meo judicio, omnis ſcientia cùm ſpeculativa eſt, tum practica: Speculativa, quatenus veritates (hoc eſt veras propoſitiones) objecto ſuo convenientes ſpeculatur, hoc eſt quærit, invenit, demonſtrat; practica verò, quatenus illæ veritates inventæ, demonſtratæque ad uſum referri, in praxin redigi poſſint. Speculatur ex. gr. philoſophus politicus, & rationibus excuſſis concludit, quæ ſit optima forma Reip. quæ leges publicæ ſaluti conducant: Ethicus, quale ſit in talibus rerum circumſtantiis conſtituti viri boni officium conſiderat & pronunciat (hoc eſt, inveſtigat & condit theorema quoddam, regulam præſcribit univerſalem) Phyſicus ſimplicium, quæ vocant, naturas, virtutes, & temperamenta (num refrigerandi vel calefaciendi, deſiccandi vel humectandi polleant facultate, ſalubria ſint an noxia) diſquirit, & ex ratione vel experientiâ determinat: Eatenus iſtæ ſcientiæ theoreticæ ſunt. At ſiquis concluſionibus iſtis utatur ad praxin ſuam dirigendam;

iiſque ſuas actiones attemperat: Si remp. adminiſtret ex iſtius politici theorematis præſcripto; ſi juxta præceptum illud morale vitam inſtituat; ſi plantam iſtam ſalutis causâ ſumat, aut reſpuat, eo fit ut iſtæ ſcientiæ, iſtæ concluſiones evadant practicæ. Idem contingit in caſu noſtro. Geometra demonſtrat univerſim quodvis triangulum parallelogrammi cujuſvis ſuper æqualem baſim conſtituti & æquæ ſibi alti dimidium æquare; vel conum æquari tertiæ parti cylindri ſuper æqualem baſem conſiſtentis, & æquè alti; hæ ſunt univerſaliter veræ propoſitiones & regulæ, quas Geometra reperit & comprobat ſpeculando; quibus uti poteſt quiſquis areæ cujuſvis triangularis menſuram determinare, vel Vas quodvis conicum cum menſura cylindrica conferre ſibi propoſitum habet; unde practica dici poſſint iſta theoremata, quatenus uſum & praxim reſpiciunt; ſed ineptè propterea utrumque illud theorema duplex ſtatuatur, ſeu dividatur in theorema ſpeculativum & practicum. Eſt igitur unica Geometria diverſos ſubiens reſpectus, & quæ contemplativa dici poteſt quatenus vera, activa quatenus utilis. Res clara eſt, quid attinet plura; quòd ſi cui regulas quaſdam utiliores, quæ præcipuarum magnitudinum dimenſiones oſtendant, Geometriâ excerptas conquerere libet, vel eaſdem præcipuè materiali cuivis ſubjecto accommodare (licèt id forſan obſtet principali ſcientiæ, & præſtet illas non alibi quàm in ipſa Geometria, hoc eſt, in ſuo loco, & ordine nativo, ſuis fundamentis affixas demonſtrationibus ſuis adhærentes reperiri) haud admodum repugnem: Sed non

ideò

ideò censeri debet ejusmodi regularum congeriem constituere partem quandam aut speciem Geometriæ à contemplativa differentis. Non sunt igitur, Trigonometria (doctrina de dimensione triangulorum rectilineorum & sphæricorum) Altimetria, vel Euthymetria (quæ distantias, investigandi modum indicat) Planimetria (quæ superficies planas describere & emetiri docet) Stereometria (quæ solidorum corporum mensuras comparat) Geometriæ practicæ magìs quàm speculativæ partes; at unius Geometriæ, quæ respectu vario speculativa dici potest, & practica. Sed de hac re sufficiant ista.

De Mathematicarum Scientiarum objecto generali, déque partitione ipsarum hactenus est dissertatum. Proximè succedit, ut de modo dispiciamus, quo circa suum objectum versantur; qui certè non alius est ab eo, qui debet quoad ejus fieri potest, in aliis, propriè dictis, scientiis obtinere. Siquidem id sibi propositum habent omnes scientiæ, ut objecti sui præcipuas proprietates, affectiones, & passiones, cum ejus essentia conjunctas, aut ab ipsa manantes, immediatè sc. aut mediatè, investigent; hásque illi necessariò competere per evidentem & certum discursum ostendant. Etsi de facto præstetur hoc, ob materiæ conditionem, à quibusdam, ut non uno loco advertit Aristoteles, ἀκριβέστερον ϗ ἀναγκαιότερον strictiùs & fortiùs, ab aliis μαλακώτερον dilutiùs & dissolutiùs. Ejusmodi verò discursus ἀπόδειξις (demonstratio) dici solet (ideò forsan, quod per illum deducta conclusio tam intellectui constat liquidò, quàm sensui manifestè patefit res exerto di- *V. Metaph. cap. 2. XI. Metaph. cap. 7.*

gito demonstrata; nam δεικνύειν est indigitare, velut extento digito ostendere; δακτυλοδεικτεῖν; unde δάκτυλος, quasi δείκτυλος) de hoc verò discurrendi modo non est mei vel officii vel propositi, sed ad Logicam propriè spectat, generatim pertractare: Illum qui nôsse cupit intimiùs, & a primis fontibus degustare; ipsum consulat oportet egregium ejus inventorem simul, & luculentum auctorem Aristotelem; in libris Analyticis, Posterioribus præsertim, demonstrationis enucleantem naturam, & leges ei præfigentem; mihi suffecerit, ut res feret, ab illo dicta præscriptáque, quatenus Mathematicis congruunt ratiociniis insinuare. Adeò verò, si rem crassiùs æstimemus, convenit hisce scientiis demonstratio, ut ipsarum quasi propria & peculiaris habeatur, nec ex æquo jure convenire censeatur aliis disciplinis. Unde (moralium initio) Aristoteles quòd res Ethicas pinguiori Minervâ exponeret, nec à se dicta strictè demonstraret, indè petit excusationem, quòd Mathematicis scientiis iste demonstrandi rigor, non ejusmodi doctrinis congrueret, subjiciens; παραπλήσιον γὰρ φαίνεται μαθηματικοῦ τε πιθανολογοῦντος ἀποδέχεσθαι καὶ ῥητορικὸν ἀποδείξεις

I. Metaph. cap. ult.

ἀπαιτεῖν. Parique ratione negat exigendam à naturali philosopho Mathematicam ἀκριβολογίαν. Τὴν δ' ἀκριβολογίαν μαθηματικὴν (inquit) οὐκ ἐν ἅπασιν ἀπαιτητέον, ἀλλ' ἐν τοῖς μὴ ἔχουσιν ὕλην. Quod cùm animadverteret auctor Logicæ minimè spernendus Jac. Zabarella, prout alicubi de se testatur ipse, demonstrationis naturam ut assequeretur rectiùs, & feliciùs explicaret,

Eucli-

Euclidea Geometriæ elementa ſemel atque iterum ſedulò pervolutavit. Operæ verò forſan pretium ſit, unde proveniat hoc diſcrimen, (quamobrem ſc. quæ in Mathematicis ubique reperitur, & ſola locum obtinet, in reliquis diſciplinis nuſquam aut rarò compareat, demonſtratio) cauſas paucis exquirere. Etenim ex iſta collatione cujuſmodi ſit demonſtratio Mathematica, neſcio an faciliùs & clariùs, quàm aliâ quâvis viâ, conſtabit & eluceſcet. Itaque provenit hoc exinde,
1. Quòd, quas hæ ſcientiæ contemplantur, res animo clarè concipimus, & ipſarum diſtinctas ideas facilè conſequimur; eò quòd ſimpliciſſimæ ſint, & communiſſimæ; maximè familiares nobis, ſenſibus expoſitæ, obviis exemplis conſpicuò repræſentabiles, adeóque intellectu facillimæ. Nihil abſtruſi, impliciti, inſolentis ipſarum complectitur natura. Quid enim v.g. ſit linea recta, quid plana ſuperficies, triangulum, quadratum, circulus, pyramis, cubus, ſphæra, quò clarè diſtinctéque percipiamus, admodum pauca requiruntur, & quæ pauciſſimis exprimi verbis, & luculentiſſimis exemplis repræſentari poſſunt. Unde fit ut de rebus tam evidenter & accuratè perceptis non adeò difficile ſit quædam demonſtrare, quæ ſcilicet iſtis ideis cohærent, vel ab iis ſtatim conſequuntur. In aliis verò ſcientiis plerumque ſecus accidit; ut nempe res, quas illæ ſpeculantur, magis reconditam, à ſenſibus abjunctam, involutam, & compoſitam naturam habeant, & ut illas obſcuriùs atque confuſiùs apprehendamus. Quid ex. c. ſit in Phyſicis color, in moralibus felicitas, in politicis jus gentium, difficile

ſit imaginari diſtinctè, exquiſitè definire: Iſtarum rerum nulla fermè perſpicua notio noſtris animis obverſatur; & ſiqua ſit à plurimis utcunque conflatur & pendet, taliſque exiſtit, cui nemo forſan alius per omnia ſimilem habeat, aut quam iis, quibuſcum congredimur, approbare valeamus. Unde talium quot auctores & interpretes, tot fere repeiuntur diverſi conceptus, & explicationes admodum inter ſe diſcrepantes: Et conſequenter evadit arduum ejuſmodi de rebus perplexis & indeterminatis certi quicquam
2. ſtatuere vel demonſtrare. Adhuc, 2. Evenit hoc ex eo, quòd Mathematici vocabula, quibus utuntur, perſpicuis & omnem ambiguitatem excludentibus definitionibus explicant; vel, ut meliùs dicam, conceptus illi ſuos nominibus efferunt propriis, adæquatis, ſignificationis certæ & invariabilis; ità quidem ut exaudito rei propoſitæ nomine reſpondens ei conceptus ſe continenter objiciat animo, neque de qua re quidvis affirmetur aut negetur, ulla ſuboriatur dubitatio, vel controverſia; quod ad propoſitionum certitudinem nemo non videt quantopere conducat. In aliis verò diſciplinis, ut notionum obſcuritas, intricatio, confuſio; ſic & ambiguitas atque inconſtantia vocabulorum in ſignificando magnam parit ac infert neceſſariò concluſionum caliginem & incertitudinem. Nam quæ uſurpant nominum definitiones ut plurimùm negligunt, & locutiones ſæpiùs adhibent improprias & metaphoricas; tum alio & alio ſenſu eadem vocabula accipiunt; diverſi ſaltem authores ipſa variè ſumunt, & diverſimodè deſcribunt, ſuæque quiſque ſigni-
ficationi,

ficationi, vel descriptioni suas conclusiones
accommodat: Unde propositionum non tan-
tùm incertitudo, sed & repugnantia subnas-
catur necesse est; inde veritatis contempla-
tio degenerat in disputationem, disputatio
desinit in meram λογομαχίαν; cùm in verbo-
rum indefinita significatione potissima pars
versetur controversiæ. Neque quas subinde
proferunt definitiones, vel descriptiones vo-
cabulorum, his vitiis plerumque remedium
afferunt, at majores haud rarò tenebras &
tricas inducunt quæstioni. Quid enim ab
ejusmodi definitionibus affulgeat lucis? Mo-
tus est actus entis in potentia, quatenus in
potentia: Lumen est actus perspicui, quà
perspicui. Anima est ἐντελέχεια (vel ἐνδε-
λέχεια, perinde est ad intellectum) vel Ani-
ma est, ἀριθμὸς ἑαυτὸν κινῶν. Quibus sc.
explicationibus implicamur potiùs & confun-
dimur, quàm illustramur aut instruimur.
Ut plerisque definitionibus melior sit & ad
usum commodior illa per jocum à Democrito
prolata definitio hominis; Homo est quod
omnes scimus. Atqui demum cùm proposi-
tionum demonstrandarum materia sint voca-
bula, rerum ab animo conceptarum symbola,
nisi certò significent illa, de propositionum
veritate constare non poterit, 3. Quòd Ma- 3.
thematicis adeo peculiaris sit demonstratio
procedit indè, quod illi nulla adsumunt aut
adhibent principia, vel axiomata non univer-
saliter vera; non inductione perpetuâ com-
probata, non communi suffragio concessa,
non denique suâ vi firma, suâ luce conspicua,
penitus αὐτόπιστα καὶ αὐτοφανῆ; ità quidem
ut quæ ex his inferuntur conclusiones audien-

tis rationem necessariò constringant. Quis enim, eidem tertio æqualia sibimet ipsis exæquari; si ab aliqua magnitudine detrahantur, aut eidem apponantur æqualia, residua vel composita suboriri æqualia; partem à toto superari; hísque gemina semel ac audiverit non intelliget facilè, non promptè agnoscet, ceu verissima, notissima, jugi experientiæ consentanea, nullam exceptionem patientia, nullam aut probationem aut declarationem ampliorem postulantia. In reliquis verò disciplinis, quæ ad alias astruendas sumuntur & inserviunt pronunciata, vel plerunque quoad universalitatem suam infirmari possunt instantiis contrariis; & propterea, nè falsitatis arguantur, exceptiones nonnullas, limitationes, seu distinctiones requirunt; vel non admittuntur nisi precariò, nec audientis consensum extorquent, vel ulterioris indigent confirmationis, aut explicationem prolixiorem desiderant quo fit ut ex illis elici nulla possit universaliter vera, manifesta, indubitata & invicta conclusio; nec fundamentis adeò lubricis & vacillantibus ulla superextruatur stabilis & inconcussa demonstratio, cui nemo contrà hiscere audeat, aut refragari. Nempe talibus ex pronunciatis; natura nihil facit frustra; omnia appetunt bonum; nihil dat quod non habet; quid obsecro firmi vel certi deducatur? Quot ex illis, modicam impendendo subtilitatem, sibi contradictorias propositiones inferre licet, inferre solent argutiarum opifices? Quibus nimirum extricandis & inter se conciliandis distinctiunculas comminisci necesse habent innumeras (mirificas illas plerunque)

que) è quibus resultat concertatio multa, nulla conflatur demonstratio. Huic affinis est alia ratio, 4. Quòd Mathematici peti- 4.
tiones adhibent, aut supponunt hypotheses non nisi clarè possibiles, & facillimè imagina-
biles (εὐπετεῖς, εὐπορίστους, εὐμηχάνους προχείρους); quásque adeò nemo, utcunque præ- *Procl.*
fractus, asper, illiberalis ingenio, non ultrò largiatur & indulgeat postulantibus. Ut e.g. cùm supponunt, aut postulant, ut inter duo quævis designata puncta ducatur, aut ducta concipiatur recta linea; quovísque puncto in centrum assumpto, ut per aliud itidem acceptum punctum, circuli circumferentia transeat, aut intelligatur transire. Corpus aliquod plano transadigi; semicirculum circa suum axem rotari; & istis consimilia; quis inficias eat hæc fieri posse, quis dubitet facta concedere; quis obstrepat tam evidenter possibilia supponenti? Quum talia fieri posse sentiat & facta videat quotidie. In aliis verò scientiis aliter se res habet. Nec enim ut rerum causas utcunque videantur explicare, suppositiones verentur procudere, suis ratiociniis præstruere, sibi condonandas expetere prorsus arbitrarias, admodum duras, horridè immodestas; nedum creditu difficiles, at subinde vel conceptu arduas. e.g. Cùm in physicis ad explicandum modum visionis, aliqui sibi postulant concedi, quòd à quovis objecti visibilis signo species nescio quæ intentionales undicunque dispergantur, aut propagentur. Alii verò quòd effluvia quædam corporea, seu cuticulæ quædam omni cogitatione tenuiores à rebus objectis derasæ discerptæque, versus aspectum ubicunque

situm

ſitum rectà deportentur. Nonnulli demum, quòd à quolibet objecti lucidi, vel illuſtrati puncto ad unumquodque punctum medii circumfuſi motus quidam (ſeu actiones vel niſus) facili ſc. negotio, dictum factum, dirigantur & deriventur. Cujuſmodi hypotheſium cuilibet, etſi ingeniosè confictæ, nemo ferè tam ſimplex eſt aut credulus ut ſtatim conſentiat, aut à ſeipſo protinus impetret concedere, non modò quòd vera ſit, at verò quòd omnino poſſibilis, aut ſaltem aliquatenus probabilis; cùm multæ pauliſper attendenti ſe difficultates objiciant, fidem diſtinentes, aut obruentes. Et illorum, qui talia ſibi plurima, perfrictâ fronte, obſtinata mente, condonari volunt quis non importunitatem repellat, in verecundiam averſetur? Saltem ejuſmodi fluxis arenis quis ſolidam inniti putet demonſtrationis fabricam? Ac-
5. cedit his, 5. Quòd Mathematici non tantùm pronunciata manifeſtè vera præmittunt, & hypotheſes adſumunt liquidò poſſibiles; at in utroque genere ſtrictiſſimam paucitatem affectant, vel potiùs efflictim depereunt. Axiomata præmittunt inquam, pauciſſima; parciſſimè quidvis petunt, adſumunt, aut præſupponunt. Eſt enim tenerrimæ frontis; & ſtomachi robuſtiſſimi, pudentiſſimum genus hominum, & tædii patientiſſimum. Quemvis concoquere malunt laborem in dictis ſuis demonſtrandis, quàm aſſenſum gratuitum emendicare, vel nimiam audi-

Ariſt. I. Poſt. cap. 25. Ἔστι γὰρ αὕτη ἡ ἀπόδειξις βελτίων (τῶν ἄλλων τῶν αὐτῶν ὑπαρχόντων) ἡ ἐξ ἐλαττόνων αἰτημάτων, ἢ ὑποθέσεων, ἢ προτάσεων· Εἰ γὰρ γνώριμοι ὁμοίως, τὸ θᾶττον γνῶναι διὰ τούτων ὑπάρξει· Τοῦτο δ' αἱρετώτερον.

auditorum liberalitatem experiri. Proprii ratiocinii virtuti, non alienæ facilitati deberi volunt conclusionum suarum evidentiam & firmitatem. Solertiâ suâ dignum arbitrantur è tenui sorte mirificè tandem locupletes evadere; ab exili radice in immensam scientiæ proceritatem excrescere; super angusto fundamine vastam, nec minùs firmam erigere molem conclusionum. Per longas igitur ambages morosiùs & prolixiùs aliquas propositiones, alioquin facillimas, deducere satagunt, eo quòd à multiplicando postulatorum & axiomatum numero vehementer abhorreant.

Quo nomine magnus ille censor (dicam an carptor?) Ramus Euclidem acriter reprehendit, quòd plurimas is propositiones suscepit demonstrandas, quas, ut ille quidem opinatur; satiùs fuisset ceu suâ luce claras arripere, indemonstratas anticipare, in axiomatum censum referre. Et potuisset eodem jure totam catervam veterum Geometrarum similis culpæ reos peragere, ipsúmque in illis divinum Archimedem increpare, quòd axiomata vel postulata plura quàm necesse fuit adsumendi licentiam refugiens, admiranda sua theoremata, quæ breviùs potuisset & clariùs, istâ nimirum adrogatâ sibi potestate, maluisset utcunque nonnihil intricatiùs proponere, prolixiúsque demonstrare. Mihi verò contra neutiquam videtur improbandum, at magnopere potiùs laudandum & amplectendum eorum institutum. Siquidem nulla debet nimia censeri diligentia, vel solicitudo, quæ primis scientiarum fundamentis impenditur stabiliendis. *Schol. Mathemat. lib.* 3.

Longe

Longè præstat ut multæ demonstrationes redundare, quàm ut una videatur deficere. Detrahenda est Epicureis ingeniis omnis ansa cavillandi, vel argumentationis cujusvis principio, seu incerto vel minùs notorio, consensum detrectandi. Est amolienda, quoad fieri potest, ex hisce disciplinis omnis suspicio, omnis formido, omnis hæsitatio. Neque discentium immodicè pertentanda fides est; nec ipsorum animi longiùs distinendi sunt & obtundendi hypothesium multitudine; neque nimis assuefaciendi temerariæ præsumptioni. Saltem haud inutile sit, nec injucundum ipsarum inter se primarum propositionum, operâ syllogisticâ cohærentiam & cognationem ostendere; denique sicut magnificentius est & gloriosiùs exiguis copiis hostem debellare, ità paucis ex principiis innumeras veritates astruere, plus admirationis conciliat, impensioris aliquid laudis victrici promeretur rationi. Quare nec omnino vituperandum existimo (nedum ambitionis aut furoris arcessendum, cum non nemine) istam magni Apollonii curiosam, sed ingeniosam, sedulitatem; qui celeberrimum illud axioma, quæ eidem æqualia, conatus est demonstrare. Ut nec Regiomontani carperem supervacuum studium primas Arithmeticæ vulgaris regulas ex Euclideis, ut perhibent, elementis aggressi deducere. Quos æmulatus quidam è nostris, ignotus nemini philosophus, etiam clarissimi pronunciati, Totum parte suà majus est, demonstrationem attentavit.

Illud utcunque constat ex dictis, quod ostendere propositum mihi fuit, tantus ubi

labor

labor ſuſcipitur, tam anxia cautela adhibetur, nè facilè propoſitio quævis in axiomatis dignitatem adſurgat, & nè conferta turba ſuccreſcat hypotheſium, ibi nihil miri contingere, ſi cunctæ concluſiones quàm validiſſimè demonſtrentur. In aliis autem doctrinis diſpar procedendi modus eſt & ratio. Nam axiomatum iſthic infinita ſeges pullulat, quæ vel ſpiſſa voluminum horrea replendo ſit. Quævis enunciatio veriſimilis ad principii gradum aſpirat; & alicui comprobandæ concluſioni qualemcunque præſtat operam, quamvis gratis aſſumpta. Cuilibet autem expediendæ quæſtioni, vel phænomeno explicando nova diſtinctáque procuditur hypotheſis. Quo fit ut in eadem (quæ dicitur & habetur) ſcientia reperiantur hypotheſes innumeræ; quot, inquam, materiæ tractandæ, tot hypotheſes diverſæ, auſcultantium nedum fidem ſuperantes, at vel ipſam memoriam obruentes; quæ vix ullâ ratione fieri poteſt ut omnes conſiſtant, & conſentiant inter ſe, neque quòd non plures ſibi mutuò diſcrepent & adverſentur. Unde quale provenerit demonſtrationum ſyſtema nemo non videt, non experitur. At porro, 6. Generationes magnitudinum, quas Mathematici pertendunt, quibus ipſas definiunt aliquando, & è quibus ipſarum proprietates educunt, etiam imaginatio noſtra ceu maximè poſſibiles aſſequitur & percipit facillimè, ratione protinus adſtipulante. Ex. gr. cùm ex rectæ lineæ, uno extremo fine permanente, circumductu circulum effici dicunt; ex trianguli rectanguli circa crus unum immotum rotatu conum efformari; ex ſemicirculi circa diametrum, 6.

velut

velut axem, gyratione sphæram detornari; cùm itidem rectam lineam ex puncti gressu brevissimo & indeflexo; parallelogrammam superficiem ex rectæ lineæ per idem planum transverso, perpetuúmque retinente parallelissimum, itinere; prisma vel cylindrum ex consimili rectilineæ planæ figuræ, vel circuli parallelo transitu deducunt, aut definiunt; cùm spiralem & quadraticem lineas curvas ex duplici motu uniformi (uno recto, vel parallelo, altero circulari) conficiunt; parabolam ex duplice motu uno uniformi, altero uniformiter accelerato describunt, & ex ejusmodi causis magnitudines ortas concipiunt; quin tales motus peragi possint, & tales ab illis effectus necessariò resultent, qui tantisper attendet abnuere nemo potest, aut ullatenus ambigere; adeò clarè percipit intellectus noster, quid ex istis generationibus suppositis consequatur. Unde nullo negotio talibus ex causis, magnitudinum proprietates elici possunt & demonstrari. Non ità naturalium, aut aliarum rerum productiones in propatulo sunt, aut ex causis quibusvis suppositis effectorum proprietates deduci possunt. Positâ v. g. tali elementarium qualitatum complexione, seu temperie; vel tanti sulphuris adustione; vel quòd materiæ cujusdam subtilis rotatus incessui directo prævaleat; quis audacter asseveret, aut statim agnoscat talem adspectui apparentiam iri necessariò productum, qualis rubicundum colorem constituere solet aut comitari? Nec proinde quispiam ex istiusmodi confictis generationibus rerum passiones & affectiones demonstret. Hisce causis accenseri potest,

7. Ordo,

7. Ordo, quo Mathematici suas materias pertractant, suas veritates indagant, suas propositiones disponunt accuratus. Notat Aristoteles ordinem in Mathematicis usurpatum memoriæ conducere: Ἔστιν (inquit) εὐμνημόνευτα, ὅσα τάξιν τινὰ ἔχει, ὥσπερ τὰ μαθήματα· at ratiocinium promovet ampliùs iste ordo: Circa quem præsertim observari potest, quòd primas propositiones suâ luce conspicuas, aliisque demonstrandis præstratas (definitiones nempe, pronunciata, postulata) sedulò congestas prima sede collocare solent, sic exigente nostri discursûs naturâ; proximo loco simpliciores statuunt propositiones ab istis immediatè deductas; tum illas quæ ab his proximè consequuntur, ac ità nusquam interruptâ perpetuâ serie, sic ut à præcedentibus posteriora lucem pariter ac firmamentum accipiant, & catena quædam nectatur argumentationum, nullâ vi dissolubilis. Quo fit etiam, ut singulæ cujusvis propositionis à primis usque principiis propaginem derivare; ejus ab illis dependentiam, & connexionem perspicere liceat, ejúsque proinde veritatem infallibili quadam ratione dijudicare. Item advertere licet quòd apud Mathematicos è propositionibus inventis ac demonstratis, si quæ sunt insignioris notæ, vel communioris naturæ, suâ vel elegantiâ vel utilitate nobiles, illæ peritorum examine comprobatæ ratæque habitæ velut in censuales quasdam tabulas digeruntur, in thesaurum reponuntur, in penu quodam publico asservantur, unde sicuti postulabit usus, depromi possunt, aliisque cum investigandis tum demonstrandis pro-

7.

Tract. de memoria & reminis. cap. 2.

propositionibus inservire. Tales pleræque sunt veterum Geometrarum propositiones, quæ magnitudinum quarundum menti nostræ præsertim obviarum præcipuas exhibent proprietates, (puta, Euclidis elementa, Sphærica Theodosii, Apollonii Conica, Archimedis de sphæra & cylindro, reliquaque) quæ nempe veritatum Geometricarum circa varias materias quasi totidem seminaria sunt, totidem promptuaria, de quibus innumeræ conclusiones, quæ ad istas materias pertineant respectivè, per facilem discursum eruantur; totidem velut elementa reliquarum fermè omnium propositionum inventiones ac probationes ingredientia; totidem denique κριτήρια, vel quasi Lydii lapides, ad quos reliquarum veritas examinetur & exigatur. In aliis disciplinis secus accidit plerunque. Nam principia si quæras, nusquam deprehendes, aut saltem reperies cum conclusionibus indiscretè permista, confusaque; planè tanquam Æneæ toto disjectas æquore classes: Id quod animum studiosi valde turbat, & impedit scientiam: Nam bene * Proclus, εἴ τις εἰς ταυτὸν συμφύρει τάς τε ἀρχὰς, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀρχῶν, ὅλην ἐπιταράττει τὴν σύμπασαν γνῶσιν, καὶ συγχεῖ τὰ μηδὲν προσήκοντα ἀλλήλοις. Nec ipsarum propositionum ullum ordinem, ullam fere connexionem observabis; adeò ut singulæ cujusque propositionis originem ad prima principia persequi nequeas, nec adeò tibi certò constare possit, utrum vera sit necne; at juxta dictum Hieroclis, ἡ μετάθεσις παραλογίζεται τὴν κρίσιν, rerum transpositio judicium decipit at pervertit. Tum nulla

* Lib. 2. pag. 22.

prostant elementa passim ob omnibus agnita, communísque suffragio stabilita, ad quæ discursus omnis referatur, è quibus petatur inventio theorematum, & quæstionum resolutio; per quæ denique propositionum veritas exploratur. Ultimò, de Mathematicis observari potest, quòd res tantùmmodò sibi compertas attingunt, ignotas & incertas prætereunt. Non profitentur omnia scire, nec affectant de omnibus dicere; quæ vera sciunt & invictis argumentis astruere queunt, ea proferunt & theorematis includunt, de reliquis tacent, & abstinent sententiam; malentes inscitiam suam agnoscere, quàm temerè quidvis affirmare; nihil immiscent, aut inserunt argumentationibus, vel assertionibus suis non planissimè perspectum, & extremo cum rigore exploratum; conjecturas omnes probabiles, & bellas argutias rejiciunt; authoritati nil deferunt; affectibus nequaquam indulgent, verborum illecebras detestantur; sententias suas efferunt, ut in Areopago, ἄνευ πάθους καὶ προοιμίου. Illo pacto suas scientias ab omni labe vel erroris, vel dubitationis conservant immunes & incorruptas. In reliquis, quas appellant, scientiis certis dubia, compertis præsumpta, manifestis obscura, vera falsis promiscuè confunduntur. Omnia proponunt sibi discutienda, explicanda, decidenda, juxta quæ sciunt, quæque ignorant; cùm certas rationes afferre nequeunt, qualescunque conjecturas proferunt, pulchris coloribus infucatas; divinant sæpiùs quàm demonstrant; denique quasi de nostris causas agunt quàm possunt disertissimè; & quæ probare nequeunt, student persuadere.

8.

Rationes, quæ à Geometris adferuntur, non persuadent, sed cogunt. Sen. l. Qu. Natur.

Sed vereor, nè collationis hujus prolixiùs & crassiùs institutæ pigere vos incipiat. Ex quâ tamen utcunque liquere potest qualis sit apud Mathematicos ratio demonstrandi; nempe talis, quòd cùm res sibi suscipiant contemplandas, quarum in animo claras & distinctas ideas habent; hásque propriis, adæquatis, invariatísque nominibus designent, ad ipsarum indagandas affectiones, & veras de iis conclusiones compingendas, tantummodò notissima, certissima, paucissima quædam axiomata præmittunt; hypotheses itidem paucissimas præstruunt, & rationi summopere consonas, nec à sanæ mentis quolibet recusandas. Generationes etiam, seu causas adsignant à nemine non intelligendas facilè, non promptè admittendas. Ordinem denique servant exquisitum, ut nulla propositio non liquidò consequatur à priùs positis ac probatis; rejectis demum omnibus, utcunque verisimilibus & speciosis, quæ tali modo colligi deducíque nequeunt. Hujusmodi verò argumentatio quin propriè sit demonstrativa, scientiámque pariat, qualis capax est humana mens, certissimam, neminem videri possit iturum inficias, aut addubitaturum concedere. Nam si, quas adsumunt, præmissæ sint adeò certæ, ut nemo tam effrons sit, illis qui contradicere sustineat, aut ipsas ausit in dubium revocare; si legitima quoque sit inferendi ratio, Logicæ ad infallibilem amussim exacta; quid obstet quò minùs illatæ conclusiones sint necessariò veræ; discursus ipse summo jure dicatur demonstratio; ejúsque effectus, hoc est in animo residens habitualis cognitio, meritò habeatur

sci-

ſcientia? At nihilominus quidam adeò ſubtiles fuerunt olim, & jam ſunt, ut negaverint Mathematicas eſſe verè ſcientias, & veras in illis demonſtrationes reperiri; quibus deducti rationibus, cùm jam non vacet, proximâ lectione, diſpiciemus.

LECT. V.

PEractis quæ de Mathematum objecto, nec non de partitione ſuccurrebant diſſerenda; poſtremâ Lectione de modo, quo circa ſuum objectum verſantur, occepi dicere. Quem utique non abs re duxi, ex inſtituta harum cum aliis diſciplinis collatione quadantenus illuſtrare. Et Mathematici quidem diſcurſûs efficacia quibus præſertim ex fontibus promanet, haud obſcurè hinc inſinuavi, ejúſque firmitatem adſerui *κατασκευαστικῶς*. Nunc *ἀνασκευαστικῶς* agendi partes obveniunt; incumbítque nobis τῶν ἐξ ἐναντίας, Mathematici ratiocinii certitudinem & præſtantiam impugnantium, impetus ſuſtinere, captionibus occurrere, tricas expedire. Ad rem.

Mathematicas ſcientias Ariſtoteles appellat *ἀκριβεστάτας ἐπιστήμας*. Idem *ἀκριβολογίαν*, exactam differendi rationem ceu peculiarem illis attribuit; híſque conſentanea paſſim innuit, atque ſupponit; nullúſque dubito, quin ad has potiſſimùm attendendo, demonſtrationis quam primus tradidit doctrinam effinxerit, ad illam ſaltem illuſtran- *II. de Cœlo. cap. 7. Metap. I. cap. ult.*

dam ac confirmandam ex his pleraque depromit exempla. Nihilominus extiterunt olim, & haud pridem inventi sunt (etiam inter ipsos quod demiremur peripateticos, qui philosophiæ Aristotelicæ nomen addixerunt suum, éque ipso Aristotele, quantumvìs invito & reclamante, videri volunt opinionis suæ firmamenta desumpsisse) qui Mathematicas esse verè scientias, quódque veræ dentur in illis demonstrationes, non dubitârint inficiari. Apud veteres quidem, præter Pyrrhonios, & Ἐφεκτικὺς (qui scientiam pariter omnem sustulerunt, & posse qualibet de re certi quicquam affirmari gravati sunt concedere, imò non veriti negare) præter hos, inquam, Epicuri grex Mathematicis præsertim infensus, ipsorum principia convellere, demonstrationes studuit infirmare. Quorum ex hara prodeuntis Zenonis cujusdam Sidonii Posidonius aggressiones integro volumine perhibetur refutâsse. Horúmque nonnulli recentiores insistunt vestigiis. Nos etsi vix πρὔργυ ducamus hominum illudentium aliis, nec suis ipsorum dictis fidentium (quique revera sunt in philosophia hæretici, hoc est αὐτοκατάκριτοι) cavillationibus refellendis multum subtilitatis impendere; ipsorum utcunque rationes, hoc est è præcipuis unam, aut alteram, excutiemus. Oggerunt primò, ut aliqua fiat demonstratio, de primarum propositionum universali veritate certò constare debet; hæc verò, sicut ipse docet & contestatur Aristoteles, non aliunde potest innotescere quàm ex inductione, hoc est ex observatione perpetuâ, perfectáque recensione singularium. Ex inductione verò colligi

Proclus, pag. 55.

colligi nequit universalis veritas propositionum; tum quoniam enumerando percurri nequeunt omnia singularia (quippe quæ infinita, vel indefinitè multa possunt existere) tum ideò quod inductio nititur sensu, qui fallax & plurimis nominibus obnoxius est errori; nec idoneus proinde testis est aut index veritatis. Ergo nulla firma basis est extruendæ demonstrationi. Ad hoc palmarium ἐπιχείρημα (quod nempe non Matheseos solummodò, sed omnis scientiæ certitudinem impetit) respondeo primùm illos seriò percontando, ipsorúmque pulsando conscientiam, si detrahantur ab æqualibus æqualia quòd superfutura sint æqualia, annon clarè percipiant, sibi persuasissimum habeant; num illius propositionis veritatem amplectantur assensu firmo; vel de ea quicquam addubitent, seu fidem illi habentes falli reformident. Si dicant se dubitare, protinus inepti, deliri, insani, scuticæ vel helleboro digni videbuntur omnibus, ipsísque velint nolint sibi. Sin abnuere vel tergiversari nequeunt, ergò veritatem istam certò cognoscunt; quid enim aliud designat cognitionis certitudo quàm rem cognitam animo cognoscentis manifestè veram videri, sic ut omnis formido contrarii penitus excludatur? At quomodo, sciscitaberis, obvenit aut parabitur ista certitudo? Respondeo, quicquid sit de modo, & quâcunque ratione, seu per inductionem & multiplicem experientiam colligatur, seu ab insitis animo notionibus exurgat, seu quâvis aliâ viâ comparetur axiomatum certa notitia, sufficit ejus nos intimè conscios esse; nos illam menti nostræ indelebili charactere im-

pressam experiri: Nec enim de modo cognitionis obtinendæ, vel de certitudinis origine, sed de re ipsa, num habeatur, disquirimus & disceptamus. Nescio fortè modum sentiendi, num idcirco non video mihi posita ob oculos, non audio quæ feriunt aures meas, non tango quæ sunt præ manibus? Ità certus sum (irrefragabili, inquam, propriæ conscientiæ testimonio certus) me propositionis istius veritatem attingere; certus es etiam tu ipse * quicquid dissimulas, aut cavillaris; sed quomodo vel unde certus evaserim, non perinde scio, nec admodum refert ut sciam; saltem indicio sit rem certò cognosci, quòd de certitudinis acquirendæ modo quærimus, & contendimus. Sed videamus utcunque de modo certitudinis hujus adipiscendæ (istorum importunitati nonnihil gratificantes.) Circa quem primò de connatis notionibus haud quicquam affirmabo (fusiorem illa quæstio dissertationem exposceret, & extra oleas propositi nostri me abriperet longiùs) id saltem adverto, si verum sit quod sane complures non infimæ notæ philosophi, Platonicæ sc. & Stoicæ scholæ sequaces arbitrantur & contendunt acriter, ejusmodi dari φυσικὰς ἐννοίας, & προλήψεις, ceu veritatis || semina, nostris animis insitas à natura, quarum lumini non liceat oculos occludere, quarúmque vi resistere nequeamus; hoc, inquam, posito, confecta res erit, & quomodo certi sumus facilè constabit, ἀδίδακτοι nempe vel αὐτοδίδακτοι, naturæ solius, magistræ fidelis, infallibili ductu instinctúque — Semel dixit nascentibus author quicquid scire licet. — Nec alià ratione primis istis decretis

* Οὐ γὰρ ἐστιν ἀναγκαῖον ἅ τις λέγει, ταῦτα καὶ ὑπολαμβάνειν. *Arist. adv. Heraclitum in Metaph.*

|| Εἴ τι ἀληθὲς ἡ ψυχὴ ξυνίησιν, ἀνάγκη ἀληθῆ εἶναι ταυτὰ τὰ σπέρματα ἐμπεφυτευμένα τῇ ψυχῇ. *Max. Tyrius Dissert.* 28.

tis assensum præstabimus, quàm quâ lapis terram petit, sol lucem ejaculatur, ignis fomitem suum depascit. Sed hoc modo prætermisso, transeamus ad alios, si qui sunt. Et quidem de sensu, quòd is bene secundum naturam comparatus, & affectus, ut fit in plerisque sanis, objecta quædam certò discernat; solem e. g. jam lucere, vel istum hominem adstare, velle dubitare non cordati philosophi, sed inepti nugatoris esse videtur; seipsum juxta cum aliis ludificantis; suæ, inquam conscientiæ pariter ac aliorum omnium authoritati repugnantis (nemo enim non perfectissimam συγκατάθεσιν præstat, non inconcussâ animi πληροφορίᾳ acquiescit à sensu perceptis) nè dicam hominis erga naturam injusti, ingratique; ejus nimirum vel bonitati vel potentiæ derogantis, quasi nos veri certò comprehendendi capaces aut noluerit, aut nequiverit efficere, sed maluerit in perpetua rerum caligine cæcos palpare, instabiles jactari, vagos oberrare.

Aristoteles è contrà sensûs proprium statuit ut semper verax sit. Ἡ μὲν γὰρ αἴσθησις, inquit, τῶν ἰδίων, ἀεὶ ἀληθής, καὶ πᾶσιν ὑπάρχει τοῖς ζώοις. Ego tamen quòd sensus aliquando fallax, hoc est, falsi judicii causa sit (& quidem interdum ferè necessaria, ac inevitabilis) cùm aut ipse malè, præter naturam & morbidè, disponitur, aut objecta minùs commodè exhibentur, non usquequaque abnuerim. Quòd verò nunquam certò scopum assequatur, hoc est, nunquam rerum objectarum species ità menti repræsentet ut illa fidens ipsorum testimoniis falsò nequeat judicare, id verò seriò concedere, mihi nil

Lib. III. de Anima, cap. 3.

videtur aliud, ut modò dixi, quàm solenniter delirare, sibi vim inferre, naturam infamare. Meliùs apud Ciceronem disserit ille: "*Sensuum ità clara judicia & certa sunt, ut si optio naturæ nostræ detur, & ab ea Deus aliquis requirat, contentáne sit suis integris incorruptísque sensibus, an postulet melius aliquid, non videam quid quærat ampliùs* — *Est maxima in sensibus veritas, si & sani sunt & valentes, & omnia removentur, quæ obstant & impediunt.*

In Lucullo.

Cui sententiæ quicquid ore profitetur, nemo non animo astipulatur. Sed quomodo sciam, regeres, quomodo distinguam an omnia rite comparentur ad certò sentiendum? Aio; non est operæ tuæ scire vel distinguere; ipsius rei evidentiâ necessariò convinceris, & manus das; impulsu naturæ volens nolens in consensum adigeris. Atque dices, à sensibus multoties decipior; cùm iridi veros colores inesse, cùm remum inflecti, cùm solem propinquum & parvum, cùm quadratum longè dissitum rotundâ specie præditum sensu duce cogito. Esto; sed iridem apparere, remum aquæ insistere, solem allucere, rem specie rotundâ conspici, absoluta talia rectè percipis; relativas vero determinationes istas magnitudinis, distantiæ, figuræ discernere ac dijudicare non sensûs est negotium, sed rationis; huic igitur, non illi tuus in his, quicunque sit, error debet imputari. Enucleatiùs hæc possem, & magis ad vivum resecare; sed nolo quæstioni penitus philosophicæ meipsum altiùs immergere, vel à proposito longiùs evagari. Satis sit pro rato fixóque sumere ac supponere (id quòd nemo revera non concedit, & cordicitùs

Ἀεὶ γὰρ ἔστιν ἐνστῆναι πρὸς τὸν ἔξω λόγον· ἀλλὰ πρὸς τὸν ἔσω λόγον οὐκ ἀεί. *I. Post. cap.* 10.

Ἡ γλῶττα τούτου φιλονεικεῖ, καθ' Εὐριπίδην, ἡ φρὴν οὐδαμῶς, οὐδ' ἡ ψυχή.

tùs amplexatur) sensûs adminiculo quædam, etsi non omnia, rectè perspici, certò judicari. Jam quid si fieri posse dicamus, ut mens humana (rectè constituta nec emota sicut in extremè fatuis, ac dementibus) nativâ facultate polleat universales propositiones intuendi, simili planè modo quo sensus discernit singulares? Nempe, sicut istarum propositionum veritas, Socrates existit, aquila volat, Bucephalus currit, à sensu immediatè perspicitur & quasi dijudicatur; ità istas; contradictoriæ propositiones nequeunt esse simul veræ; quòd aliquando cæpit existere, ab alio ducit originem; actio rem arguit existere (vel ut effertur vulgò, non ens nihil agit) & ejusmodi propositiones nostra mens (etiam sine prævia notione, nulloque adhibito discursu, vi suâ nativâ) directè speculatur & comperit esse veras; qui modus attingendi veritatem peculiari nomine vocatur *νόησις*, & ipsa facultas *νοῦς*. Quid obstat verò quo minus tali facultate percipiantur Mathematicæ demonstrationis principia? Sed philosophus, aies, propositionum omnium universalium, etiam primorum principiorum, veritatem non aliunde colligi docet, quàm ex inductione. Sic enim ille: *Οὐ μὲν ἀλλὰ ἐκ τοῦ θεωρεῖν πολλάκις τοῦτο συμβαίνειν, τὸ καθόλου ἂν θηρεύσαντες ἀπόδειξιν ἔχομεν· Ἐκ γὰρ τῶν καθέκαστα πλειόνων τὸ καθόλου δῆλον.* Et expressiùs; *δῆλον δὴ, ὅτι ἡμῖν τὰ πρῶτα ἐπαγωγῇ γνωρίζειν ἀναγκαῖον· Καὶ γὰρ ἡ αἴσθησις οὕτω τὸ καθόλου ἐμποιεῖ.* Et adhuc, si fieri potest, manifestiùs in Ethicis ad Nicomachum: *Εἰσὶν ἄρα ἀρχαὶ, ἐξ ὧν ὁ συλλογισμὸς, ὧν οὐκ ἔστι συλλογισμὸς,*

I. Post. Anal. cap. 13.

II. Anal. Post. cap. ult.

Lib. VI. cap. 3.

γισμὸς, ἐπαγωγὴ ἄρα. Quibus consonant ex eodem desumptæ sententiæ; nihil est in intellectu quod non fuit priùs in sensu: Intellectus adinstar se habet rasæ tabulæ; eóque redigas quæ apud eum reperiuntur talia: Νοεῖν ἐκ ἐςὶν ἄνευ φαντάσματ☉; Et, Ἀνθανόμεν☉ μηδὲν ἐδὲν ἂν μάθοι, ἐδὲ ξυνίοι, &c. Ex quibus constare videtur in ea sententia versatum esse philosophum, quòd scientiarum principia sensuum testimoniis, & singularibus experimentis omnino nitantur. Quod si verum esse concedatur, vix diffitendum sit indè aliquid decedere rigidæ certitudini, nec istâ hypothesi admissâ, quodvis humanum ratiocinium supra conjecturæ probabilis fastigium adscendere. Attamen ubi quævis propositio perpetuæ experientiæ deprehenditur consentanea (præsertim quæ non circa rerum accidentia versari videtur, at præcipuas ad proprietates, & intimam ipsarum constitutionem pertinere) saltem tutissimum erit, & à nobis exiget summa prudentia promptum ut ei consensum præbeamus. Sicut enim ille, quod nos vel semel decepit indicio fidem adhibere, non injuriâ postuletur inconsultæ temeritatis, ità quod millies exploratum expectationi nostræ quàm accuratissimè respondit, præcipuæ fuerit prudentiæ ei nequaquam diffidere, sed assentiri fortiter, mordicùs adhærere; præsertim cùm assensui roborando accedat naturæ sibi nunquam dissimilis constantia; & immutabilis sapientia primæ causæ, res cunctas juxta simplices ideas formantis, & certos ad fines dirigentis: quæ consideratio penè sola conficere potest, ut de crebris experimentis

Lib. de memor. cap. 1.

Lib. III. de Anima.

mentis confirmatâ propositione, tanquam universaliter verâ, certi esse debeamus, nec ut de illa subdubitando naturam esse fluxam, & rerum auctorem sibi fore disparem suspicemur. Imò nonnunquam hac de causa, propter naturæ constantiam, vel ex unico aliquo experimento prudenter colligamus universalem propositionem. ut notat Aristoteles, & appositissimo confirmat exemplo. Ἔνια γὰρ εἰ ἑωρῶμεν οὐκ ἂν ἐζητοῦμεν, οὐχ ὡς εἰδότες τῷ ὁρᾷν· Οἷον εἰ τὴν ὕελον τετρυπημένην ἑωρῶμεν, καὶ τὸ φῶς διιόν· Δῆλον ἂν ἦν καὶ διά τι φωτίζει, διὰ τὸ νοεῖν μὲν χωρὶς ἀφ᾽ ἑκάστης, νοῆσαι δ᾽ ἅμα ὅτι ἐπὶ πασῶν οὕτως Unde vel hoc nomine (ut hæc applicemus nostro proposito) qui pronunciatis Mathematicis assensum detrectaverit, extremæ saltem imprudentiæ, hoc est fatuitatis & amentiæ, notam haud effugerit. Nec opus est ad demonstrandam Mathematici discursûs efficaciam, ut amplius quicquam expetamus, quam ut præter dementes & insigniter stolidos, omnes eo constringantur. Veruntamen, si rem ipsam ex vero, auctoritate seclusâ, perpendamus, nulla ratio nos adiget ut fateamur Mathematica principia solâ inductione, seu perpetuo sensuum testimonio niti. Siquidem notari potest imprimìs, quòd si quempiam hominem sciscitemur cur aliquòd axioma Mathematicum credat esse verum, non respondebit, opinor, eo quòd ità multoties accidisse viderit & observârit, at verò forsan nescire se causam cur credat, attamen obstinatè credere profitebitur; quod indicium est aliunde quàm ex sensu derivari, qui Mathematicis axiomatis præstatur,

I. Post. Anal. c. 32.

tur, assensum. Tum notari potest secundò, res plerasque Mathematicas, quamvis ex sensu de illis cogitandi sumamus occasionem, ipsas tamen immediatè directéque sensum non incurrere, sed quòd existant, & quales sint à sola ratione colligi dignoscíque. Quis enim unquam vidit, aut ullo sensu dignovit exactam lineam rectam, aut circulum perfectum? Quis duas quascunque res exquisitè sibi congruas, aut invicem æquales animadvertit unquam aut attigit sentiendo? Tantum abest ut ipsarum attributa sensu comperiamus, aut propositiones, in quibus attributa rebus annectuntur, universales ex eo colligamus. A sensione quidem, nec illâ multiplice, sed unicâ, deduci possit hypothesium Mathematicarum possibilitas: Quod v.g. possit inter duo assignata puncta duci recta linea: Sentimus enim ab uno ad alterum utcunque fieri posse progressum, in quo si quid inest asperum & à rectitudine deflectens, illud abradi possit, eatenus quidem manu nostrâ, donec ad sensum recta videatur effecta linea; unde pari ratione colligamus licet, ex parte rei non repugnare, nè reliquæ asperitates seu exorbitantiæ lævigentur & corrigantur, adeóque ut linea perfectè recta constituatur. Similíque ratione quòd quævis à Mathematicis tractata magnitudo possit existere, unica sensûs observatio satis attestetur; quódque possibiles sint omnes hypotheses Mathematicæ, quòd magnitudines componi, dividi, moveri, spatium replere possint, non opus est ut longa dies doceat, sed unicum sensûs indicium evicerit abundè. Ubi perstringi potest obiter illorum opinio, qui

qui figuras Mathematicas in ſola mente, nec uſpiam alibi rerum in natura volunt exiſtere (quod equidem miror viros alioquin Matheſeos apprimè peritos concedere; in quibus Blancanus, cujus hæc verba ſunt: " *Quamvis* " *igitur reipſâ non exiſtant (entia Mathematica)* " *quia tamen tam in mente auctoris naturæ, quàm* " *in humana eorum ideæ, tanquam exactiſſimi* " *rerum typi exiſtunt, ideò de ipſis eorum ideis,* " *quæ per ſe primò intenduntur, & quæ vera ſunt* " *entia, agit Mathematicus.* Aliúſque nonnemo ex Mathematicorum ſententia: " *Non* " *eſt*, inquit, *in rerum natura ulla ſphæra, quæ* " *ſolum tangat* κτ̀ στιγμὴν; *ſemper enim parte* " *aliquâ ſuperficiei ſuæ attingit ſubjectam lineâ* " (ſuperficiem) *planam, quemadmodum Geo-* " *metris objiciebat Protagoras, ut eſt apud Ari-* " *ſtotelem.* Quæ tamen ſententia planè falſa videtur, & ex ſuperiori diſcurſu perſpicuè refutabilis; eíque quæ maximè adverſatur, habetur mihi veriſſima; quòd nempe materiæ cuivis particulæ reverà inſint omnes quotquot intelligi poſſunt, figuræ Geometricæ; inſint, inquam, actu, & perfectiſſimè, quamvis ſenſui non compareant, prorſus eodem modo, quo ſub rudi marmore deliteſcit effigies Cæſaris, quam certe ſculptor non de novo producit, at ſolummodo profert in apricum, aſpectuíque prodit poliendo, hoc eſt, materiæ partes illam involventes, & obumbrantes ſubmovendo. * Ita ſi particula n

Libro de natura Mathem. p. 7.

Voſſius de Mathem. pag. 4.

I. Metaph. cap. 2.

* *Unde Michael Angelus, Sculptor ille nobiliſſimus, Sculpturam haud aliud eſſe dixit quàm purgationem à ſuperfluis. Deme enim à ligno aut lapide omne quod ſuperfluum eſt, & reliquum erit imago quam intendis. D. Wotton de Architectura II.*

quam-

quamvis mundanæ materiæ, vacuo nusquam hiantem, manus angeli (Dei saltem potentia) dignata fuerit expolire, comparebit & oculis exponetur accuratè rotunda superficies sphærica; non illa recenter procreata, sed è materiæ circumjacentis latebris, involucris & curvis eruta, detecta, patefacta. Quinimò reverâ quicquid ullo sensu attingimus, est figura Mathematica, quamvis ut plurimùm irregularis; at nulla est ratio cur irregulares figuræ ubivis existant, regulares nusquam existere queant. Quod si ponatur hoc, (quòd sc. res Mathematicæ nequeant existere) actum erit quoque de istis ideis, seu typis in mente deformatis; erunt enim mera somnia, vel idola rerum nusquam existentium: sed hanc quæstionem jam fusiùs persequi non vacat; è diverticulo repetamus iter institutum, hoc est, inquisitionem de modo parandæ certæ Mathematicorum axiomatum notitiæ; qua de re proponam ultimò; quòd, Fieri potest ut propositionum quarundam veritas nec ab immediato mentis intuitu, nec à crebra sensûs observatione, nec ab anticipatis notionibus inclarescat, sed ex ipsâ terminorum significatione declaratâ, seu ex suppositâ manifestè possibili, & sensus suffragio consentaneâ, rei generatione, per implicitum quendam, & quasi virtualem discursum, intuitivæ notitiæ affinem, deducatur. Quomodo se res habere videtur in plerisque pronunciatis Mathematicis. E. g. Quòd totum parte suâ majus sit, aut, Pars toto minor, satìs evidenter consequi videtur, ex intellecto vocabulorum *totius*, & *partis*, *majoris*, & *minoris* proprio sig-

significatu. Siquidem per majus altero denotatur id, quod alteram rem continet, aut alteri rem æqualem, aliquídque præterea; per minus altero id quod, vel id cui æquale, continetur in altero sic ut aliquid præterea supersit. Totum verò strictiùs designat id quod continet aliud, & aliquid insuper; pars, id quòd continetur in alio, sic ut illo sublato remaneat insuper aliquid. Ex quo liquet majus respectu totius, & minus respectu partis, vi significationis vocabulorum, se habere ut genus ad speciem, seu magis universalis nominis ad nomen minùs universale; proindéque juxta Logicæ regulas infallibiles, rectè prædicari, Totum est majus; Pars est minor.

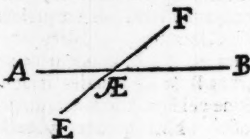
Haud absimiliter æquales fore magnitudines, quæ eidem alteri magnitudini æquantur, ex æqualitatis, quæcunque statuatur, notione statim, opinor, elucescet. Ut si cum Apollonio, cúmque * aliis nonnullis, ponatur alteri æquale designare, quod alteri collatum per omnia congruet, hoc est idem spatium replebit, eundem locum occupabit; indè per ἀγχίνοιαν quandam, celerrimo mentis ictu, discursúque velut instantaneo consequetur dictum axioma: Posito quippe magnitudinem quamvis A occupare locum χ, & ipsi æqualem B propterea (ob suppositam sc. æqualitatis significationem) eundem locum χ occupare; item ipsi A æqualem esse C, & proinde C locum χ etiam occupare, quoniam ostensum est B & C eundem locum χ occupare, erunt B & C æquales itidem ex dicta definitione vel significatione æqualitatis præsuppositâ. Niti quidem poterit hujus-

Apud Proclum, pag. 54.

** Hobb. in Philos.*

hujusmodi discursu certa cognitio istius axiomatis, at illum mens exerit nullo negotio, & quasi virtualiter potiùs quam explicitè; quem quidem discursum à præclarissimo Geometra Apollonio excogitatum sugillat Proclus, ità tamen ut si tanti res foret, & opportunè fieri posset, haud difficile videatur magnum virum à censura vindicare. E quibus obiter adverti potest axiomatum plerorúmque veritatem resolvi in definitiones, seu explicationes terminorum, aut vocabulorum quibus efferuntur, & ab iis consectari ceu porismata facili quodam & tacito ratiocinio; quas tamen definitiones Geometræ propter nimiam solent evidentiam negligere. Οὐ λαμβάνει τι σημαίνει, τὸ ἴσα ἀπὸ ἴσων ἀφελεῖν, ὅτι γνώριμον, ait Aristoteles. Simili modo pronunciata quædam per implicitum discursum elici possunt, ex supposita rei subjectæ generatione. Ut posito circulum oriri ex rectæ lineæ circumductu, uno rectæ istius extremo, quod centrum dicatur, fixo permanente, indè subitò, mente vix parum peragitatâ, infertur ejusmodi pronunciatum, omnes à circuli centro ad ambitum ejus ductæ rectæ lineæ sunt æquales inter se. Item quòd quæ rectæ lineæ se non intersecant præterquam in unico puncto, ex generatione rectæ lineæ præstratâ, per tacitam quandam argumentationem velut imprudentes colligere videamur. Scilicet cùm recta linea A B producta

I. Analyt. Post. c. 10.



ducta (concipiatur ex continuo) lineam E F intersecat, non nisi in puncto Æ eam intersecare possit. Non opus est ex aliis ediscere hæc principia, quàm ex vocabulorum quibus constant, definitionibus, seu explicationibus. Sed hactenus dissertatum sit adversus præcipuum ἐπιχείρημα, quo Mathematicarum demonstrationum certitudinem evertere conantur adversarii; quam disputationem claudo Luculli verbis apud Ciceronem: *Necesse est ut Lancem in libra ponderibus impositis deprimi, sic animum perspicuis cedere.*

Sed aliam præterea machinam admovent, non certitudini quidem ac evidentiæ, sed dignitati atque præstantiæ Mathematum detrahere studentes. Quòd enim Mathematici discursus non sint demonstrationes, scientificæ, potissimæ, perfectæque indè connituntur inferre, quòd cùm scire sit rem per causam cognoscere; (secundum Aristotelis effatum, ἐπίςασθαι οἰόμεθα, ὅταν εἰδῶμεν τὴν αἰτίαν) " *Mathematicus* tamen (ipsissima sunt " verba Pererii, non ignobilis Peripatetici) " *neque considerat essentiam quantitatis, neque* " *affectiones ejus tractat, prout manant à tali* " *essentia, neque declarat eas per proprias causas,* " *per quas insunt quantitati, neque conficit de-* " *monstrationes suas, ex prædicatis propriis & per* " *se, sed ex communibus & per accidens.* Sic illi. Quibus respondeo, quas demonstrandi legum consultissimus Aristoteles scientificæ demonstrationi præfigit conditiones, illas Mathematicis ratiociniis apprimè congruere. Exigit is, ut præmissæ sint universaliter ac necessariò veræ; quæ verò fortior cogitari potest necessitas illà, quam præ se

K ferunt

ferunt axiomata Mathematica, quarum æterna est, & immutabilis veritas? Vult ut primæ sint ac immediatæ, hoc est, ut nullo præcedente argumento, nullâ præviâ notione comprobentur; quis non videt hoc iisdem pronunciatis convenire, quæ ceu αὐτόπιστα non comprobant, sed assumunt? Præcipit etiam ut notiores, & evidentiores sint illatâ conclusione; atqui notissima sunt & manifestissima ista decreta, nemo quisquam ut sit, qui simul ac audiverit & intellexerit, non statim assentiatur; & notiora quidem conclusionibus deductis, quia per illa, adhibito legitimo discursu, constat de harum veritate. Denique requirit, ut causæ sint conclusionis: Quæ conditio dupliciter accipi potest; vel tantùm ut in illis contineatur ratio, propter quam conclusiones necessariò veræ credantur, & assensus certò producatur (hoc est ut medius terminus assumptus obtineat qualemcunque necessariam connexionem cum terminis ingredientibus conclusionem); vel strictiùs, ut adhibitus iste medius terminus plusquam necessarius effectus, & certum signum, nempè propria causa sit attributi, vel proprietatis, quæ de subjecto prædicatur in conclusione. Quòd autem ista conditio priori modo intellecta, conveniat præmissis cujuscunque syllogismi Mathematici, non est ulla ratio quòd dubitemus, siquidem nullus est eorum qui non assensum validissimè cogit atque constringit; neque consequitur hoc ex eo, quòd præmissæ necessario veræ sunt (aliàs enim eas non admitterent Mathematici); ista verò necessitas arguit subesse terminorum essen-

tialem

tialem inter se copulam, causalémque dependentiam, in qua fundetur; cùm accidentia sic comparata sint, ut separari possint, & accidentalia proinde prædicata non nisi contingenter subjecto tribuantur (ἐξ ἀνάγκης ὑπάρχει περὶ ἕκαστον γένος, ὅσα καθ' αὑτὸ καὶ ᾗ ἕκαστον τὰ δὲ συμβεβηκότα οὐκ ἀναγκαῖα, inquit Aristot.) Et hujusmodi quidem argumentatio quælibet parit scientiam ad minus τὸ ὅτι, censeturque demonstratio, (quòd clarissimè convincit animum, & validissimè confirmat veritatem) sed inferior & ignobilior, quoniam ex effectu vel ex signo, non ex causa, monstrat rem ita se habere. Nullus igitur discursus Mathematicus non hucusque scandit assurgitque. Cæterùm quòd posteriori modo sumpta prædicta conditio multis etiam congruat Mathematicis ratiociniis, hoc est, quòd in iis adsumptus medius terminus instar habeat alicujus causæ respectu proprietatis in conclusione subjecto attributæ; primùm auctor est nobis Aristoteles (is nempe, qui, sicut aliquoties dictum, demonstrationis naturam accuratissimè perspexit, & uberrimè pertractavit, & cujus proinde in hoc negotio auctoritas plurimi est facienda) is, inquam, causalium demonstrationum ex Mathematicis disciplinis exempla petit, omnium, quæ profert, clarissima, firmissimáque, forsan & sola. E. g. pro demonstrationis ex causa utraque materiali & formali desumptæ exemplo adducit illud celebre theorema, quo sc. angulus in semicirculo rectus demonstratur. * Et diserte scientias mixtas, vel Physico-mathematicas, quas vocat ὑπαλλήλας, cum puris con-

I. Post. cap. 6.

II. Post. cap. 11.

** I. Post. cap. 13.*

ferens ità proloquitur: Ἐνταῦθα γὰρ τὸ μὲν ὅτι τῶν αἰσθητικῶν εἰδέναι, τὸ δὲ διότι τῶν Μαθηματικῶν. Item rurſus de primæ figuræ ſyllogiſmis verba faciens; Αἴτε γὰρ (inquit) Μαθηματικαὶ τῶν ἐπιστημῶν διὰ τούτου φέρουσι τὰς ἀποδείξεις, καὶ σχεδὸν, ὡς εἰπεῖν, ὅσαι τὸ διότι ποιοῦνται τὴν σκέψιν. Ubi demonſtrationes Mathematicas ſupponit eſſe præſertim dioticas, ſeu cauſales. Verùm, auctoritate dimiſſâ, ut ex rei veritate diſſeramus, Mathematicas demonſtrationes fore cum primis cauſales, indè videtur conſtare, quòd concluſiones ſuas non adſtruant aliunde, quàm ex pronunciatis præcipuas & generaliſſimas omnium quantitatum affectiones exhibentibus; & ex definitionibus ſpecialium magnitudinum generationes conſtitutivas, & eſſentiales paſſiones declarantibus. Unde quæ ex ejuſmodi præſtratis principiis emergunt propoſitiones, ex intimis iſtarum rerum eſſentiis, & cauſis promanent oportet. At nimio prolixior ſim & gravis veſtræ patientiæ, ſi quomodo cauſales ſunt ex principiis illis Mathematicis ortæ demonſtrationes, nunc aggrederer diſtinctiùs explicare; nec non quod hujuſce diſputationis reliquum eſt nunc abſolverem. Itaque reſervo.

I. Poſt. cap. 14.

L E C T. VI.

MAthematicæ evidentiæ ac certitudini conſultum eſt aliquatenus lectione proximè ſuperiori; reſtat ut ipſarum dignitati

tati

tati succurramus, quódque reverà scientificæ sint, potissimæ, causales, & quomodo distinctiùs exponamus; necnon ut præcipuis, quas adversarii pertendunt, instantiis occurramus. Quod modum attinet causalitatis, notemus imprimìs cum Aristotele, quòd in omni demonstrativa scientia tria potissimùm considerentur; subjectum, cujus illa necessarias passiones contemplatur, investigat, demonstrat; communia pronunciata, quorum subsidio quærit, & demonstrat passiones de subjecto; & passiones ipsæ, de subjecto demonstrandæ. Πᾶσα γὰρ ἀποδεικτικὴ ἐπιστήμη περὶ τρία ἐστὶν, ὅσα τε εἶναι τίθεται· Ταῦτα δ' ἐστὶ, τὸ γένος, οὗ τῶν καθ' αὑτὰ παθημάτων ἐστὶ θεωρητική· Καὶ τὰ κοινὰ, ἃ λέγομεν, ἀξιώματα, ἐξ ὧν πρώτων ἀποδεικνύουσι· Καὶ τρίτον, τὰ πάθη, ὧν τί σημαίνει ἕκαστον λαμβάνει. *1. Post. cap. 10.* De subjecto Mathematicarum demonstrationum nihil occurrit admodum observabile, nisi quòd id semper aliqua sit species magnitudinis, specificata, determinata, discreta ab aliis per aliquam reciprocam proprietatem, ut mox explicabimus; ex. g. Linea recta, angulus, triangulum, circulus, cubus, sphæra, &c. sunt subjecta demonstrationum Mathematicarum. De passionibus verò demonstrandis observo, quòd illæ duplicis generis sint; communes & propriæ. Communes sunt, quæ subjecto conveniunt, necessariò quidem, at non soli, atque ità ut aliis quoque subjectis verè tribui possint. Ità triangulo isosceli convenit habere tres angulos pares duobus rectis, quadrato habere quatuor rectos angulos circuli circumferentiæ secari à rectâ linea non nisi

duobus punctis; nam etiam scaleno triangulo accidit habere tres angulos pares duobus rectis; & parallelogrammo oblongo habere quatuor angulos rectos; & innumeris curvis lineis, præter circuli circumferentiam, non secari a recta linea præterquam duobus punctis. Unde patet hujusmodi passiones non ex speciali natura subjecti sui, sed ex magis universali quapiam ratione promanare, quódque conveniant illi non immediatè, sed quatenus illud sub alio superiori, latiorique genere magnitudinis comprehenditur. Dein hujusmodi passiones neutiquam ingredi definitionem illius specialis subjecti, nec illi determinando sufficere, quum ampliores sint, & illis positis subjectum poni minime consequatur. Passiones autem propriæ soli subjecto conveniunt, cúmque eo reciprocantur omnino, sic ut illis positis etiam subjectum necessariò statuatur. Ita circulo soli convenit, inter omnes figuras, ut pares radios habeat, & quæcunque figura pares è centro ad perimetrum radios emittit, est circulus. Eidemque sic congruit ut assumpto in diametro puncto quolibet, ac inde excitatâ ad dictam diametrum perpendiculari rectâ, quæ circumferentiæ occurrat, interceptæ rectam quadratum æquetur rectangulo ex segmentis diametri (vel ut intercepta recta sit media proportionalis inter segmenta diametri) congruit, inquam, hoc circulo, & cuicunque figuræ convenit hoc, illa circulus est. Item ut ab extremitate diametri ductæ ad ejus ambitum rectæ lineæ rectos semper angulos constituant, convenit circulo; & vicissim cuicunque figuræ convenit ea passio, illa

illa circulus erit. Ità quoque parallelis rectis lineis reciprocè convenit, ut illæ indefinitè productæ nunquam concurrant; ut illis insistens alia recta faciat angulos alternos æquales, vel externos internis æquales, vel internos æquales duobus rectis; útque interceptæ quælibet rectæ, ad æquales angulos ductæ, sint æquales inter se; ac ut interceptæ æquales rectæ faciant cum illis æquales angulos. Ex quibus constat, ab hujusmodi passionum qualibet subjectum determinari, & circumscribi; & proinde quamlibet earum subjecto definiendo rectè supponi, vel adsumi posse; quippe cùm hæ tam essentiali, arcto, reciproco nexu inter se cohæreant, ut unâ positâ reliquæ necessariò consequantur. Indè quoque liquet has passiones ex parte rei fore ὁμοσοίχους, coordinatas, & simul-taneas naturâ (ἀντιστρεφούσας κατὰ τὴν τοῦ εἶναι ἀκολούθησιν) nec unam ab alia magis, quàm illam ab hac dependere. Quòd & indè clarè confirmatur, quoniam habito ad istas passiones respectu subjectum diversimodè potest generari; ut circulus nedùm ex rotatu lineæ rectæ, sed etiam ex ductu perpendicularium; ex angulorum rectorum effectione, tótque aliis omnino modis, quot habet ejusmodi reciprocas passiones. Déque reliquis magnitudinibus specialibus eadem est ratio. Sin una quædam talis passio præ aliis arbitrariè suscipiatur ad subjecti definitionem, eatenus illa causæ rationem subit, aliarum respectu,

Refragatur his Aristoteles. Top. VI. 5. Πλεόνως (*inquiens*) οὐκ ἐνδέχεται τοῦ αὐτοῦ ὁρισμοῦ ὁρισμὸς εἶναι. *Sed nihilominus, juxta dictum ipsius sæpiùs at nunquam satis laudatum*, ὅσιον προτιμᾶν τὴν ἀλήθειαν: *nam isthic labi Philosophum mihi indubium est.*

quoniam illius ceu medii interventu reliquæ per necessariam consequentiam resultant, & notificantur. Ut si circulus definiatur ex paritate radiorum, indè demonstrabitur interceptam perpendicularis quadratum æquari rectangulo ex segmentis diametri; & quòd anguli in semicirculo recti sint; éritque proinde paritas ista harum passionum origo, quoad modum nostri discursûs. Sin, ut fieri possit, circulus definiretur figura tali proprietate prædita, quòd assumptâ quâvis rectâ, erectâque utcunque additam perpendiculari ad figuræ perimetrum terminatâ, quadratum istius perpendicularis æquetur rectangulo ex segmentis dictæ rectæ; vel si definiatur circulus ejusmodi figura, in quâ sumptâ quâvis rectâ, rectæ ab ejus extremis ad figuræ perimetrum quomodocunque ductæ rectos angulos constituant; ex harum postremarum definitionum utralibet prior illa passio, nempe paritas radiorum, facilè deducatur & demonstretur; éritque propterea paritas ista velut effectus dictarum passionum respectivè, ejúsque cognitio dependebit ab illarum notitiâ discursui præstratâ. Paritérque, si definiantur rectæ parallelæ ab æqualitate angulorum alternorum factorum ab insistente recta, ex illá ceu causa reliquæ prius memoratæ parallelarum proprietates oriuntur. Haud diffiteor ex his reciprocis passionibus alias quasdam aliis simpliciores & evidentiores; magis obvias & manifestiùs possibiles videri, quomodo paritas radiorum reliquis circuli, quas commemoravi, proprietatibus facilior videtur & clarior, quoniam ex generatione per radii circumductum facil-

limè

limè effectibili planè deducitur: Et Euclidi visa est, (licet infeliciter, ut nonnulli putant, in quibus ipse propter multas rationes nomen profiteor meum) negativa proprietas ista parallelarum, quòd nunquam coëant quantumvis protractæ, omnium, quæ parallelis multæ competunt, proprietatum facillima, clarissimáque; nec non agnosco quòd expediat à facilioribus, magísque familiaribus istis passionibus argumentandi initium sumere, hoc est, ab illis potiùs quàm ab aliis quod contemplamur subjectum definire; circulum, inquam, e. g. potiùs ex radiorum paritate, quàm ex quadrati cum rectangulo, ut supradictum, æqualitate definire: Quoad captum nostrum, fateor, hoc præstet; ac perinde fuerit ad ipsius rei naturam attendendo, unde discursum auspicemur; quemcunque catenæ annulum apprehendas, tota sequetur, at illum qui magìs obvius & præ manibus ex usu censemus arripere. Se res habet ut in progressu circulari; à quocunque circumferentiæ puncto ordiaris cursum, universam emetieris. Talis est revera nec alia causalitas & dependentia mutua terminorum demonstrationis Mathematicæ; arctissima scilicet & intima connexio ipsorum inter se; quæ causalitas formalis utcunque dici potest, eò quod ex una proprietate primitus assumpta reliquæ passiones velut ex forma resultant: Nec aliam in rerum natura causalitatem existere puto, in qua necessaria consecutio fundetur. Crepant quidem Logici demonstrationes nescio quas ab externis causis efficiente vel finali, cujusmodi tamen nullum genuinum exemplum exhibent, vel exhibere possunt,

imò

imò quales, ut ego quidem existimo, repugnat dari. Nec enim ullius externæ, puta efficientis, causæ tum suo effectu talis esse potest connexio (saltem à nobis nulla talis intelligi potest) propter quam à posita causa efficiente necessariò poni effectum; vel ab effectu posito determinatam aliquam causam statui, strictè loquendo, licebit arguere. Siquidem in rerum natura nulla datur (quæ philosophicæ sit ἀκριβείας) efficiens causa prorsus necessaria; omnis enim efficientis causæ tum actio, tum actionem consequens effectus pendet à liberrimâ voluntate, summâque potestate Dei O. M. qui pro suo arbitratu prohibere potest influxum & efficaciam cujuscunque causæ; itémque nullus est effectus sic uni causæ alligatus, quin ab aliis forsan innumeris possit produci. Ergo fieri potest, ut hujusmodi causa sit, nec effectus subsequatur; vel ut effectus fit, & nulla peculiaris causa quicquam conferat ad ejus existentiam: Unde ab efficiente causa ad effectum, vel permutatim ab effectu ad causam nulla datur argumentatio legitimè necessaria. e. g. Ex eo quòd ignis sit, haud consequitur necessariò fomitem appositum ustulari, vel fumum emitti; de facto secus accidisse certis ex historiis habemus compertum. Neque vicissim ex cinere vel fumo necessaria colligatur ignis existentia: Nam posse cinerem & fumum immediatè creari à Deo, vel aliis modis produci quis addubitet? Fortè dices cinerem & fumum relationem ad ignem intrinsecam connotare; respondeo breviter, ex eo supposito fiet ut procedat argumentatio non à causa efficiente vel effectu, sed à causa vel

cau-

causato formali; at saltem ejusdem naturæ res, eademque specifice, ut loquuntur, qualis est cinis, vel fumus potest citra ignis efficientiam existere, aliisque ex causis oriri; id quod facit ad nostrum propositum. Nec ex altitudine solis, omnino demonstret Astronomus ejus moram supra horizontem, aut tempus diei præterlapsum; legimus enim aliquando fixum in cœlo solem, legimus & subinde retrogressum. Item ex eo (exemplum est demonstrationis ab efficiente causa celeberrimum, & tritissimum apud Aristotelem, & reliquos Logicæ scriptores) quod tellus intercedat soli, non sequitur lunam pati luminis defectum; nam volente Deo solares radii telluris corpus permeabunt; aut à recto tramite declinantes, adeóque terræ non occursantes, Lunam attingent, vel aliunde luna luce perfundetur: Imò posito sole non ponitur lumen; nam sanè cum Dominus noster oppeteret mortem, & mundi lux melior occideret, ipse sol horrore facti perculsus, & pudore quasi suffusus, suos intra se radios recepit, & faciem suam occultavit; sol, inquam, meridianus deliquium perpessus est, nullâ lunâ intercipiente lucem ejus, nullâ nube ipsius fulgorem offuscante. Ergo non ex interfectu corporis opaci concludi poterit eclipsis, nec vicissim ex hac iste: juxta naturæ fateor legem & consuetudinem nunquam non ex talibus causis tales prodeunt effectus; quò condonandum sit Aristoteli naturam arbitranti intrinsecæ necessitati suppositam, nec externæ superiori potestati obnoxiam; sed revera aliud est accidere naturaliter, aliud necessariò existere. Enimverò

Ἡ σελήνη ἐπιπροσθεῖται ὑπὸ τῆς γῆς. Τὸ δὲ ἐπιπροσθούμενον ἐκλείπει· Ἡ σελήνη ἄρα ἐκλείπει. *Philop. in I. Post.*

verò necessariæ propositiones veritatem habent universalem, immutabilem, æternam, arbitrio nulli subditam, nullâ potentiâ impediendam. Aristoteles. Ἐξ ἀνάγκης ἐστὶ τὸ ἐπιστητόν· ἀΐδιον ἄρα· Τὰ ἐξ ἀνάγκης ὄντα, ἁπλῶς ἀΐδια πάντα· Τὰ δὲ ἀΐδια ἀγέννητα, καὶ ἄφθαρτα. Idem. Ἀνάγκη καὶ τὸ συμπέρασμα ἀΐδιον εἶναι τῆς ἀποδείξεως. Itaque quoniam agentium efficacia sisti, vel immutari potest, & effectus omnis à variis causis potest proficisci, non dabitur ulla demonstratio ab efficiente causa, vel ab effectu. Et par est ratio de causa finali, & mediis ei respondentibus; posito nempe fine, neutiquam consequuntur media quævis determinata; neque positis mediis finis resultabit necessariò. Ex quibus consectatur nihil esse quòd miremur nullas in Geometria dari demonstrationes à causâ effectrice, vel finali deductas, sed omnes à forma, & internâ rei constitutione per definitionem expressa procedere. Nec non iniquè facere eos, qui tales à Mathematicis demonstrationes exigunt, quales ipsi nè quidem in somnis ullas viderint, qualiúmque nuspiam extet vola, vel vestigium. Sed de ista re satis. Ex antedictis verò consequitur syllogismum in quo una passio essentialis cum alia connectitur, vel ab alia infertur, esse demonstrationem causalem, ex causa nempe formali deductam. In exemplum proponatur talis syllogismus. In omni figura pares habente radios quadratum ex perpendiculari æquatur rectangulo ex segmentis diametri. Figura Z pares habet radios (ex hypothesi sc. aut ex ostensis) ergo in figura Z quadratum ex perpendiculari

VI. Ethicorum. cap. 3.

I. Anal. Post. cap. 8.

diculari æquatur rectangulo ex segmentis diametri. Ubi passio quædam, æqualitas sc. quadrati cum rectangulo, demonstratur de subjecta figura, per æqualitatem radiorum; quæ respectu ejus est causa formalis, ut supra expositum est. Talis etiam sit hic syllogismus. Rectis lineis nunquam convenientibus insistens recta linea facit angulos alternos æquales. At rectæ lineæ A, B, nunquam conveniunt inter se (ex hypothesi puta, vel ex prius demonstratis) ergo, rectis lineis A, B, insistens recta linea facit angulos alternos æquales. Sed de passionibus demonstrandis hæc sufficiant animadversa. Quoad pronunciata observo, quòd illa vel omnibus quantis lineis, superficiebus, corporibus, angulis, & propter hæc numeris, motibus, ponderibus, temporibus, & reliquis secundariò quantis conveniunt; vel specialibus quantis peculiariter congruunt; illa communia nuncupare licet, hæc propria. Communia pronunciata quasdam indicant omnium quantitatum essentiales passiones adeò simplices & claras, ut vix per alias ex hypothesi priores demonstrari possint, saltem demonstratione non indigeant. Ita quantis omnibus absolutè convenit, ac de iis pronunciari potest, quòd quantum divisibile est in quanta homogenea (hoc est linea in lineas, superficies in superficies, corpus in corpora;) quanta homogenea componi vel sibi addi possunt. Quanto minori subtrahi potest æquale quantum à majore quanto. Omnis magnitudo spatium replere potest adæquatum sibi. Omnis magnitudo determinati situs capax est; potest quiescere, potest moveri,

veri, motu quovis; directo, in gyrum; uniformi, difformi; veloce, tardo. Hujusmodi quidem absoluta pronunciata subticentur; Geometris ob nimiam evidentiam; at subintelligi debent ob alia pronunciata, propterque definitiones magnitudinum specialium, & propter cujusquemodi hypotheses. E. g. cùm dicitur, magnitudines, quæ congruunt inter se, vel quæ idem spatium occupare possunt, æquantur, supponitur magnitudines posse spatium occupare. Cùm definitur angulus rectus ex tali insistentia rectæ lineæ super rectam, supponitur rectam posse insistere; vel talem positionem obtinere. Cùm definitur circulus ex rectæ lineæ circumductu, subsumitur ut possibilis iste motus, ista gyratio. Quantis autem inter se comparatis conveniunt & attribui possunt ejusmodi passiones; æqualitas duorum quantorum consequens eorum æqualitatem ad aliud; æqualitas ex congruentia, vel ejusdem spatii completione resultans; æqualitas ex compositione, vel divisione; ex additione vel subtractione æqualium emergens, & similes. Haud absimiliter pronunciata propria quantorum specialium exprimunt passiones, quas ob simplicitatem & evidentiam suam demonstrare non liceat, aut non expediat. Ut e. g. rectæ lineæ convenit, & de ea pronunciari potest, quod ab alia recta linea non intersecetur præterquam in uno puncto; quod non habet aliquam communem partem cum altera recta; quod non potest cum unica altera recta spatium concludere vel figuram constituere. Etiam ei convenit, ut possit duobus quibusvis assignatis punctis interjacere;

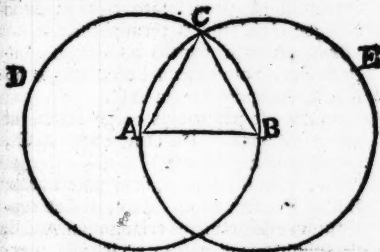
cere;

cere; ut possit in continuum protrahi utcunque, vel indefinitè; ut possit esse radius circuli (quæ sanè postulant Geometræ, sed possent audacter pronunciare, sunt enim passiones rectæ lineæ, ex ejus, quæcunque sit, definitione facilè deducibiles) ista verò pronunciata fortè possint, ut in præcedentibus exposui, qualitercunque demonstrari; sed quia veritas ipsorum facillimè perspicitur, & conceditur ab omnibus, non est necesse, nec expedit ut id fiat. Cùm igitur hæc pronunciata contineant passiones essentiales aut quantis omnibus, aut specialibus certè quibusdam, & proinde necessariò cohærentes inter se (intelligo quasdam quibusdam respectivè) liquet illas ad demonstrationem rectè adhiberi, ac ex iis confici demonstrationes causales. Exemplo sit ejusmodi syllogismus, (Quæ congruunt inter se, sunt eidem æqualia; Magnitudines A, B, congruunt inter se (ex hypothesi, vel ex antè demonstratis) ergo, Magnitudines A, B, sunt eidem æquales. Ubi duarum magnitudinum æqualitas respectu ejusdem deducitur ex ejus causa (quasi) formali, sc. ex congruentia istarum magnitudinum. Sed de pronunciatis impræsentiarum plura non addam, tantùm dico quòd cùm ex iis, hoc est ex generalibus omnium magnitudinum affectionibus, & ex specialium magnitudinum proprietatibus reciprocis deriventur omnia theoremata Mathematica, satis apparet illa suis ex causis demonstrari. Igitur opportunum est ut pergam ad id quod reliquum est ex disputatione contra Mathematicæ demonstrationis impugnatores instituta. Ut nempe quas obtendunt instantias

bre-

breviter expendam. Primò ipsum Geome-
triæ caput impetunt, & primæ elementorum
propositionis probationem negant ex pro-
priis causis deduci, adeóque nec illam potis-
simâ ratione demonstrari: Aiunt enim in
illa triangulum fore æquilaterum ex eo in-
ferri, quòd inter duos circulos æquales con-
structum sit, hoc verò triangulo æquilatero
non per se, sed ex accidente convenire, futu-
rúmque id æquilaterum, etiam si duo isti
circuli nequaquam ducerentur, aut abes-
sent omnino. Ad hanc instantiam & alias
consimiles à variis diversimodè respondetur,
& quidem ab omnibus satis appositè: Ego
nihil innovabor, & aliorum responsis præter-
missis meo modo respondeo, primùm adver-
1. tendo multipliciter accipi demonstrationis
vocabulum. 1. Pro singulo quovis syllo-
gismo scientifico (juxta definitionem philo-
sophi, ἀπόδειξίς ἐστι συλλογισμὸς ἐπιστημονι-
κός) hæc demonstratio simplex appellari
possit. 2. Pro congerie vel systemate pluri-
um ejusmodi syllogismorum serie quâdam in-
ter se connexorum ac ad unius propositionis
probationem conspirantium. Qualis de-
monstratio non incongruè dici possit compo-
sita. 3. Pro ultimo illo syllogismo, quo
proposita conclusio firmatur immediatè, ad
quem reliqui syllogismo conducunt, & colli-
2. mant. Quò posito, subnoto, quòd si singuli
syllogismi compositæ demonstrationis sint
causales, præsertim ultimus, quo velut ex-
tremo ictu lapis confringitur, etiam tota
demonstratio composita meritò censeri debet
3. causalis & scientifica. Præterea adverto,
quòd adsumpta quædam vel probata, in de-
cursu

cursu totius demonstrationis, respectu unius alicujus (v. g. ultimæ) conclusionis accidentalia videri possunt, quæ tamen aliarum respectu propria sint & essentialia; quódque non opus sit, ut omnia prædicata in compositæ demonstrationis serie adhibita per se conveniant extremæ conclusionis subjecto, verùm sufficit ut unumquodque suæ propriæ conclusionis subjecto taliter congruat. Quibus ex observatis pleræque omnes contra Mathematicas demonstrationes allatæ instantiæ dissolvi possunt. Adeóque si singuli syllogismi in dictæ primæ elementorum propositionis seu constructionem, seu demonstrationem adductæ sint demonstrationes simpliciter scientificæ, censeri debeat ipsa propositio scientificè demonstrata. Quapropter inspiciemus illos; at brevitatis causâ pro syllogismis enthymemata subjiciemus, & consequentiæ necessitatem insinuabimus. Ipsa propositio (quod opinor nemini è vobis ignotum) talis est.



Super quàvis datâ rectâ (AB) triangulum æquilaterum constituere. (vel in theo-

rematis formam redacta, quod perinde est, siquidem omne problema possibile pro theoremate potest haberi, quatenus ista possibilitas est demonstrabilis; theorematicè, inquam, proposita talis erit, Potest super quavis datâ recta (ut A B) triangulum æquilaterum constitui.)

1. *Enthymema.* Quævis recta potest esse radius circuli. Ergo, A B esse radius circuli (cujus centrum A.)

Antecedens continet essentialem proprietatem rectæ lineæ, ut supra insinuatum est.

2. *Enth.* Eâdem ratione, centro B, intervallo A circulus describi potest. Supponantur igitur ducti circuli B C D, A C E, quoniam ostensum est hoc fieri posse.

3. *Enth.* Duo æquales circuli communi radio descripti se mutuo intersecabunt. Ergo, circuli B C D, A C E se intersecabunt, (puta in puncto C.)

Antecedens nimio nimis est manifesta, ex evidentissimâ proprietate circuli, quòd undique claudatur & terminetur.

4. *Enth.* A dato puncto ad datum punctum duci potest recta linea. Ergo ab A ad C duci potest recta A C.

Antecedens est proprietas rectæ lineæ, ut antea diximus. Ducatur ergo A C, quoniam id fieri potest.

5. *Enth.* Simili ratione, duci potest recta B C. Ducatur ergo. Jam, liquet constitutum esse utcunque triangulum A C B, ex definitione & natura trianguli. Peractáque est constructio problematis. Demonstrandum restat triangulum ACB esse

æqui-

æquilaterum, quódque reliquum est suscepti negotii converti potest in hujusmodi theorema. Triangulum constitutum ex rectis, à centris duorum æqualium circulorum communi radio descriptorum ad ipsorum intersectionem ductis, est æquilaterum. Cui demonstrando theorematì inserviunt hæc enthymemata.

Rectæ lineæ à centro circuli ad ejus circumferentiam ductæ sunt æquales inter se. Ergo rectæ AC, AB, sunt æquales. In antecedente est notissima proprietas circuli, quâ definitur. 1.

Eodem discursu, rectæ BC, AB, æquantur. 2.

Quæ eidem æqualia sunt, inter se sunt æqualia. Ergo, rectæ AC, BC, æquales sunt inter se (quippe quæ ostensæ sunt æquales eidem AB). 3.

Antecedens est evidentissima, nobilissimáque proprietas comparatarum magnitudinum, de qua supra dictum.

Sequitur ultimus decretorius & rem totam conficiens syllogismus. Omne triangulum habens æqualia tria latera est æquilaterum. Triangulum ABC (ex modò demonstratis) habet æqualia tria latera. Ergo, Triangulum ABC est æquilaterum. Major est definitio trianguli æquilateri; & evidentissimè continetur in præmissis causa conclusionis. Quæ sit enim vel fingi possit causa, cur triangulum ABC sit æquilaterum propior & intimior hâc, quòd habeat æqualia tria latera, equidem nequeo conjectare. Vidimus igitur syllogismos omnes 4.

hujus propositionis tam constructioni, quàm demonstrationi constructionis inservientes esse totidem veras demonstrationes; utpote ex essentialibus rerum subjectarum attributis deductas; ultimum præsertim esse summopere causalem & scientificum. Est igitur illi, ut spero, instantiæ factum satis. Verùm alteram, si bene memini Pererius & alii producunt instantiam, & celebrem istam propositionem, quæ est trigesima secunda primi elementi, sugillant ut minùs scientificè demonstratam. Nam & hîc aiunt ad demonstrandum omnes angulos trianguli duobus rectis exæquari, protrahi latus unum, & alteri parallelum duci, quæ ut fiant omnino extrinsecum est & accidentale proposito negotio, nec ullatenus ex illis dependet angulorum, qui in triangulo sunt, æqualitas astruenda. Ergo, ista demonstratio non procedit ex iis, quæ per se, nec adeò parit scientiam. Scilicet hi subtilissimi, vel fastidiosissimi potiùs argutatores ratiocinia ni fallor desiderant absque medio quovis invento vel adsumpto; argumentationem expetunt sine argumento. Aristoteles quidem argumenta rejicit ἑτερογενῆ, ex alterius naturæ scientia deprompta; hi cuncta respuere videntur, rem probari volunt ex se, nihil aliunde patiuntur adsciscì.

1. Sed ad rem, 1. Saltem Aristoteles ipsissimam hanc propositionem adducit in exemplum eorum, quæ per se insunt subjecto, & per causam ostenduntur, disertis his verbis. Ἕκαστον δὲ ἐπιστάμεθα μὴ κατὰ συμβεβηκὸς, ὅταν καθ' ἐκεῖνο γινώσκομεν, καθ' ὃ ὑπάρχει ἐκ τῶν ἀρχῶν τῶν ἐκείνου, ᾗ ἐκεῖνο· οἷον

I. Post. Anal. cap. 9.

τὸ δυοῖν ὀρθαῖς ἴσας ἔχειν, ᾧ ὑπάρχει καθ' αὑτὸ τὸ εἰρημένον, ἐκ τῶν ἀρχῶν τῶν τούτων. Quòd rem ipsam spectat repono breviter, 2.
quoniam triangulum ex rectis lineis constituitur, rectæ lineæ proprietates eatenus ad ipsum pertinent. Rectæ verò lineæ proprietas est, ut protrahi possit; ergo protractio ista non est omnino triangulo accidentaria vel extrinseca. Pariter & rectæ lineæ proprietas est, anteà demonstrata, ei ut possit per quodvis punctum extra ipsum duci altera parallela recta. Ergo & hoc per se convenit triangulo, quatenus ipsius constitutionem ingrediuntur rectæ lineæ, seu latera ipsius. Porro, quòd vera 3.
sit ista propositio non diffitentur, opinor, adversarii; nec ideò quòd demonstrabilis. Ergo debet adsumi medium aliquod ei demonstrando. Adsumitur angulus externus, & in duas partes divisibilis ostenditur æquales internis & oppositis duobus angulis trianguli; unde planissimè sequitur omnes tres internos duobus rectis æquari. Quodnam adsumi posset medium convenientius, aut intimius equidem non video, vel potiùs video nullum posse. Adhuc respondeo si- 4.
cut ad priorem instantiam. Si syllogismi singulares examinentur, ex quibus aggregatur istius trigesimæ secundæ propositionis demonstratio, perspicietur illorum totam vim inniti definitionibus, vel communibus pronunciatis, immediatè scilicet aut mediatè. Unde constabit istas esse demonstrationes scientificas; idcircóque totam ex iis conflatam demonstrationem, ac ultimum syllogismum, quo propositio immediatè demonstratur.

monstratur. Eodem modo ad omnes, quæ proferri possunt, instantias facilè poterit responderi.

Ut longiusculam hanc, & sanè vereor ut nimis tumultuariam, quippe properantiùs excogitatam & effusam, dissertationem aliquando finiam; mihi videtur, quòd omnis discursus certus ac evidens, juxta Logicæ regulas irrefragabiles, fluens ex principiis universaliter & perpetuò veris, adeóque in quo necessaria terminorum connexio reperitur, est propriissimè, potissimè, scientificentissiméque demonstratio. Quódque omnis alia, præter istam connexionem superiùs explicatam, causalitas, huic applicabilis negotio, sit pura puta fictio, nullo argumento fulta, nullo exemplo confirmata; quódque demonstrationes (quanquam aliæ aliis brevitate, concinnitate, proximitate versus prima principia, & similibus præcellant virtutibus) evidentiâ saltem, certitudine, necessitate, terminorum essentiali connexione & dependentiâ mutuâ sibi cunctæ pares sint; denique quòd Mathematica ratiocinia sint perfectissimæ demonstrationes.

Accuratiùs hæc certè, luculentiùs & uberiùs exposuissem, nisi quòd importunè obvenientes aliæ quædam occupatiunculæ avocarint animum, & meditandi mihi tempus præciderint; nec non ab aliquot diebus languor quidam (non adeò gravis, at nonnihil incommodus) corpusculum invaserit; qui facit ut cùm ipse non admodum valeam, vos saltem, Optimi Auditores, discupiam valere plurimùm.

Hîc

Hîc desitum est hoc anno, professionis institutæ primo, cui nimirum accidit unicum habere terminum. Amplificando numero, chartæque, quæ superest, propiùs adimplendæ, duas mutuò desumam (vel potiùs gratis adjiciam) lectiones, anni primas subsequentis.

L E C T. VII.

MOS est, Academici, cum humanitate conspirans optimè, nec qui magis alibi quàm apud vos usu frequente confirmatus invalescit, post diuturnam absentiam oblatos in conspectum amicos ardentiori quodam affectu complecti, profusiori garrulitate compellare. Cui ut ego consuetudini insisterem hodie, si mihi vel mediocrem aut natura concessisset, aut studium comparâsset dicendi facultatem, equidem permulta fateor haud segniter urgerent. Nam & affectûs stimulos acerrimi persentio; & orationis argumento instructus sum splendidissimo juxta ac uberrimo, ut pro comperta nempe vestra eximia in me benevolentia meritas grates persolverem; ut enixum in præclaras disciplinas studium prædicarem, ut dignam viris philosophis patientiam vestram collaudarem, & congratularer vobis. Sed quum ingenium meum, ad dicendum perquam inhabile, ineptúmque reclamet vehementiùs, & hujus instituti nostri ratio non nihil adversetur, &

vos, opinor, ipsi non Rhetoricis blandimentis demulcendas aures, sed ad philosophicam potius severitatem compositos animos huc adducatis, non tam verba dari vobis, quàm rerum scientiam exhiberi cupientes, in patheticos excursus prorumpentem cohibebo linguam, & ab omni procemio prorsus temperabo. Vos tantùm, (Optimi, Humanissimíque Auditores) omnibus gratitudinis,& benevolentiæ ulnis officiosè complectens, plurimam dicens vobis & animitùs vovens salutem, congressúmque denuò nostrum lætum vobis exoptans & auspicatum, ad muneri nostro debitum opus me protinus accingam. Persequar autem elapso proximè termino inceptum iter, quámque tum exorsus sum telam porrò conabor detexere. Placeat igitur vobis, mihi quid tunc agendum proposuerim, & in exequendo proposito quousque processerim recordari. Aggressus nempe sum vestibulum quoddam condere, Mathematicis, quæ mihi pertractandæ veniunt, disciplinis præstruendum; hoc est generalia quædam de illis quasi prolegomena delibare. Et quidem ipsarum imprimis de nomine, quamobrémque disciplinarum sibi peculiari ratione titulum conciliârint, tum de objecto generali quousque se extendat; déque partitione (cùm juxta mentem aliorum, tum ex propria sententia) satis fusè disserui. Proximè verò de modo quo circa suum objectum versantur, hoc est inventione ac assertione proprietatum objecto suo congruentium per certum ac evidentem discursum, qui demonstrationis vocabulo insigniri solet, occæpi

occœpi dicere. Cujus utique naturam illustrare conatus sum, ex discrimine Mathematicum inter ratiocinandi modum, & illum qui in plerisque aliis adhiberi consuevit scientiis, per utrisuque non incuriosam collationem deprehenso; tum verò Mathematicorum discursuum certitudinem, & præstantiam ab adversantium ceu illationibus, & offuciis quâ ferme licuit diligentiâ studui vindicare. His utcunque pro nostra tenuitate discussis proximum esset, & mea vergit illuc animi propensio, ut ad Mathematicæ demonstrationis exponendas species devenirem; nec non ut de Mathematicâ inventione, nobilissima sanè materia, disquirerem, nisi quòd conducat huc, & fere necessarium videatur, ut priùs syllogismi Mathematici partes expendamus integrales, hoc est ut de præmissis & conclusionibus discursûs cujusque Mathematici quales sint & quotuplices dispiciam.

Præmissas quod attinet omnis discursûs scientifici, sunt illæ vel prima principia, vel à primis principiis continuâ serie derivatæ conclusiones; quæ postquam ità deductæ sunt, ipsæ principiorum vim habent, obeûntque vices, respectu conclusionum quæ ab illis inferri, vel illarum ope, comprobari possunt. Tota verò vis cujuslibet ratiocinii apodictici tandem resolvitur in certitudinem & evidentiam primorum principiorum; his indivulsis radicibus adhærescit, his inconcussis subnititur fundamentis omnis veritas, omnis firmitas, omnis evidentia omniscunque scientiæ. Quare de illis agemus imprimis; paucis quidem generaliùs

neraliùs de principiorum natura, tum de differentiis earum (hoc est quot sunt inter se specie diversa) postremò de singulis speciebus separatim. Quod ad principia spectat universim, rectè non uno loco notat Aristoteles, quòd sicut in motu naturali nullus ex infinito vel ad infinitum processus datur, sed ab aliquo termino incipi, in aliquem desinere oportet, siquidem infinitum nequit pertransiri (οὐ γάρ ἐστι τὸ ἄπειρον διελθεῖν): Ab infinito progressum sumente nunquam pervenietur huc, nec ab hoc ad infinitum tendens progressus unquam finietur; ità in mentis operatione discursiva, quæ motûs instar est continuò successiva, debet aliquis præstitui limes, à quo discursus ordiatur, hoc est non omnes propositiones ab aliis, indesinenti serie, comprobari, sed quædam à demonstrante sumi, concedíque debent ab audiente; alioquin interminabilis, & irrita fuerit omnis quæ suscipitur inquisitio, confirmatio, vel declaratio veritatis. Prout ædes extrui nullæ possunt, sic nec erigi scientiæ, non
Met. XI. 6. substractis quibusdam fundamentis. (Μηδὲν γὰρ τιθέντες ἀναιροῦσι τὸ διαλέγεσθαι καὶ τὸν ὅλως
Met. II. 2. λόγον: Et, Περὶ πάντων ἀδύνατον ἀπόδειξιν εἶναι. docet & pluries inculcat Aristoteles.) Ejusmodi verò propositiones ideò dicuntur principia, quoniam ab iis (gratis assumptis, ultróque concessis ex docentis discentísque quasi pacto quodam & consensu mutuo) initium desumit argumentatio, indè progrediens ad alias remotiores notitias. A philosopho proinde definiuntur ἄμεσοι προτάσεις, propositiones immediatæ, quia nullo

nullo medio vel argumento aliunde adſcito fulciuntur; ſeu quòd immediatè, ſtatim, nullo mediante diſcurſu, impertitur illis aſſenſus. Quod non ità accipiendum eſt, quaſi principiorum exigeret ratio, ut ipſa ſimpliciter ἀναπόδεικτα ſint, omninóque nequeant demonſtrari, vel utcunque comprobari; ſic enim pauciſſima vel nulla cujuſlibet particularis ſcientiæ pronunciata, poſſent haberi vel appellari principia. Nam valdè dubito, vel eò potiùs propendeo ut exiſtimem, præter unicum illud omnis ratiocinii fundamentum, contradictoriæ propoſitiones nequeunt eſſe ſimul veræ, vel ſimul falſæ, quòd nullum aliud omnino datur ſimpliciter indemonſtrabile axioma (axioma dico; nam de definitionibus & hypotheſibus alia quodammodo res eſt, ut mox videbimus; quæ tamen ſuo modo probari vel illuſtrari poſſunt) ſaltem particularium ſcientiarum principia nedum poſſunt, at etiam debent, ſi poſcat diſcipulus, à magiſtro demonſtrari. Tenetur enim, ſua munia ſi probè exequi velit, & nomen ſuum implere, ſcientiæ præmonſtrator omnem à ſtudioſo rationabilem (ità cum barbaris loqui liceat) ſcrupulum eximere; ergò ſua quæ adſumit principia, ſi obſcura ſunt exemplis illuſtrare, ſi dubia confirmare debet (ut res feret, & ſubjecta materia patietur) ex aliis notioribus, & magis indubitatis principiis, ad ipſa uſque omnium prima principia, ſi opus ſit, idque petet ſtudioſus, diſcurſum promovendo. Ex. gr. Siquis de eo ſubdubitet Optico principio, quòd viſibilis puncti ſpecies rectâ defertur

aut

aut radiat in omne punctum medii circumjecti, id ex eo confirmandum est, quòd experimur objectum punctum ab oculo ubicunque sito conspici posse, nisi alicubi in rectâ à puncto visibili ad oculum lineâ corpus opacum interponatur. Et quidem pleraque Geometriæ theoremata, respectu Opticæ, Mechanicæ, Astronomiæ, & reliquorum Mathematum principia sunt, hoc est in illis ceu vera supponuntur, nec itidem omnino demonstrantur; at si de talis alicujus theorematis veritate non constet studioso, Optico (vel alterius disciplinæ magistro) incumbet id declarare, vel eò saltem digitum intendere, ubi declaratum invenietur. Imò, si in aliquo hæsitaverit axiomate Geometrico, non effugere poterit demonstrator, rem strictè æstimando, illius demonstrandi necessitatem: Nec enim ulla censeri potest accuratè perfecta, summéque scientifica demonstratio, quæ non ad primos scientiæ fontes, ad aliquod simpliciter indemonstrabile, suâ solâ vi firmum, suâ luce clarum, pervenerit. (Τότε γὰρ οἰόμεθα γινώσκειν ἕκαστον, ὅταν τὰ αἴτια γνωρίσωμεν τὰ πρῶτα, καὶ τὰς ἀρχὰς τὰς πρώτας, καὶ μέχρι τῶν στοιχείων, dictat nobis philosophus, initio φυσικῆς ἀκροάσεως.) At quomodo, percontetur aliquis, ostendetur veritas axiomatum Geometricorum? Per alia, respondebo, simpliciora pronunciata, si qua sunt, ex altiore quadam & universaliore scientia, nimirum è prima philosophia, depromenda (è prima philosophia, quæ maximè generalium ac simplicium notionum thesaurus est aut esse debet; Ari-

stotelísque

stotelísque proinde nominatur *κυρία πάντων ἀξίωμα*: Proclo, *μία ἀνυπόθετος (ἀξίωμα) παρ' ἧς αἱ ἄλλαι ἀποδέχονται τὰς ἀρχάς*) sin nulla compareant talia, per definitiones terminorum, quibus ipsum constat; ut si quis ambigat de eo, an Totum parte suâ sit majus; si nullum reperiatur in metaphysicis theorema vel axioma certius, evidentius, simplicius isto, per quod ostendatur, recurrendum est ad definitiones totius, & partis, majoris ac minoris; è quibus rectè positis haud difficile fuerit illud axioma demonstrare. Paritérque se res habet in reliquis. Haud absimili ratione liquet, quòd ad principiorum naturam non absolutè pertinet aut requiritur, ut ipsa sint ex se, vel ad omnem immediatè captum evidenter vera, sed duntaxat ut ei, qui ad ediscendam particularem istam, cui dicta principia deserviunt scientiam, promptus & paratus (hoc est animo studiosus, indole habilis) accedit, manifestè vera videantur, & apta nata consensum ejus extorquere. ex. gr. Geometriæ theoremata, quæ ut modò dictum in Optica vel Astronomia principiorum obtinent locum, Geometriæ quidem perito clariora sunt, & facillimum ab eo consensum impetrant; at difficilè capiuntur, ægréque conceduntur à Geometriæ ignaro: Nec tamen idcircò desinunt esse principia, disciplinis istis accommodata; at saltem indè consequitur haud idoneum illarum fore discipulum hominem *ἀγεωμέτρητον*. Sapienter igitur & circumspectè philosophus demonstrationem procedere docet non ex absolutè manifestis, sed *ἐκ γνωριμωτέρων*

Anal. Post. I. 9.

Ὡς δὲ καὶ τὸ ἁπλῶς γνώριμον, οὐ τὸ πᾶσι γνώριμον ἐστὶν, ἀλλὰ τὸ τοῖς εὖ διακειμένοις τὴν διάνοιαν. *Top. VI. 4.*

μοτέρων τοῦ συμπεράσματος, hoc eſt id ſemper habent, ut admiſſa poſt ſe trahant concluſionem, illamque ſuà, ſi quam habent, luce perfundant. Non ſunt igitur neceſſariò particularis ullius ſcientiæ principia ſimpliciter ἄμεσα, vel αὐτόπιστα, vel αὐτοφανῆ, verùm ſolummodò reſpectu bene comparati auditoris credibilia debent eſſe, ſatíſque manifeſta. Haud malè Proclus:

Lib. 2. p. 22. Οὐδεμία ἐπιστήμη τὰς ἑαυτῆς ἀρχὰς ἀποδείκνυσιν, οὐδὲ ποιεῖται λόγον περὶ αὐτῶν, ἀλλ' αὐτοπίστως ἔχει περὶ αὐτὰς, καὶ μᾶλλον εἰσὶν αὐτῇ καταφανεῖς τῶν ἑξῆς, & ipſe philoſophus. Λέγω δὲ ἀρχὰς ἐν ἑκάστῳ γένει, ἃς ὅτι ἔστι μὴ ἐνδέχεται δεῖξαι. Ἐν ἑκάστῳ γένει, in ipſa ſingulari quadam ſcientia demonſtrari nequeunt, alioquin non eſſent principia, ſed forſan extra ipſam eorum nonnulla poſſunt, & debent demonſtrari.

Met. I. ult. Idem huc ſpectans: Τῷ γεωμετρεῖν μανθάνοντι ἄλλα μὲν ἐνδέχεται προειδέναι, ὧν δὲ ἡ ἐπιστήμη, καὶ περὶ ὧν μέλλει μανθάνειν, οὐδὲν προγινώσκει.

Phyſ. I. 2. Denuò, τῷ γεωμέτρῃ οὐκ ἔτι λόγος ἐστὶ πρὸς τὸν ἀνελόντα τὰς ἀρχὰς, ἀλλ' ἤτοι ἑτέρας ἐπιστήμης, ἢ πασῶν κοινῆς; hoc eſt, Geometra, ceu talis, principia ſua non adſtruit, neque cum ea reſpuente congreditur, at vero ſpectat id ad alteram aliquam, ſaltem ad communem omnibus ſcientiam; in ea decidenda lis eſt principiis indicta.

Primaria verò principiorum conditio eſt, docente philoſopho, quòd univerſaliter & neceſſariò vera ſint, hoc eſt ut nullam loci, temporis, aut caſûs exceptionem patiantur, & ſubjecti naturæ repugnet prædicatum

tum ei non convenire. Aliàs illatæ conclusiones evaderent falsæ vel incertæ, nec certa ac firma scientia qualem pollicetur demonstratio, sed error aut anceps produceretur suspicio. Siquidem in omni syllogismo scientifico, qui constat ex uno vel pluribus immediatè principiis, principium assumptum est major propositio in prima figura; quod nisi sit universaliter verum, argumentatio minimè consistet, ut notissimum in Logicis. Ut & quòd principiorum si qua sit debilitas aut imperfectio (quales imprimìs sunt particularitas, & contingentia) illam in conclusiones necessariò derivari. Nihilominus circa hanc principiorum veritatem ex usu sit advertere, quòd illa non sit unius generis, nec penitus univoca. Nam veritas absolutè primi principii de contradictoriarum propositionum incompossibili simultate quoad veritatem aut falsitatem, quasi specie differre videtur à veritate reliquorum principiorum. Quod ejus enim originem spectat, quicquid sit de aliis, hæc certè notio mentibus nostris immediatè connata videtur, & indita nobis à Deo, unà cum ratiocinandi facultate, cui intrinsecè adnexa est; siquidem nulla potest edi ratiocinatio hoc non admisso principio; imò omnis ratiocinatio non aliò tendit, huc tandem redigitur, ut adigatur adversarius sibi contradicere, id est, omnium absurdorum maximum admittere, quòd propositiones contradictoriæ simul consistere possunt. Hoc nisi concedatur, inutilis sit omnis ratio, inanis omnis disquisitio, vel disputatio circa veri-

Arist. L. 1. *Post. c.* 14.

veritatem. Non pendet hoc ab alia quapiam prævia notione, ſuppoſitione vel argumentatione, ſed ratiociniis omnibus includitur, ut fundamentum iis ſuppoſitum, ut inſtrumentum quo habiles reddimur ad ratiocinandum de aliis. Igitur hoc principium præ aliis, & *καθ᾽ ἐξοχὴν* verum
Met. III. 3. videtur. (*Πάντες ἀποδεικνύντες εἰς ταύτην*
XI. 7. *ἀνάγουσιν ἐσχάτην δόξαν, φύσει γὰρ ἀρχὴ καὶ τῶν ἄλλων ἀξιωμάτων αὕτη πάντων*; inquit rectè philoſophus.)

Quanquam extremum rigorem adhibendo, quia duabus tibiis firmus incedere debet ſyllogiſmus, nec è præmiſſis unam indubitatè veram eſſe ſufficit, forſan prætereà neceſſariò requiritur unum & alterum axioma cunctis ratiociniis præſternendum; hæc nempe: Quòd ſenſus ſit indubitatum *κριτήριον* veri ſuo modo; vel, Apparentia rei certum eſt indicium rem exiſtere. Item, rei conſimilis exiſtentia rei poſſibilitatem arguit; vel, ab omnimoda rationis paritate, quoad exiſtendi poſſibilitatem, valet conſequentia. His enim tacitè ſuppoſitis inniti videtur omnis ſcientia rerum, omnis argumentatio de rebus. Siquidem aliorum principiorum indemonſtrabilium non alia veritas poſtulari videtur, præter ſatis manifeſtam poſſibilitatem conceptûs, quem animo formamus de alicujus ſymptomatis exiſtentia; hoc eſt ut concipiamus, & ſupponamus aliquid fieri quod revera fieri poſſit. E. g. Ponamus duas res idem ſpatium occupare, ſibi congruere, coextendi. Ponamus inter duo puncta lineam rectam duci. Ponamus rectam lineam uno quieſ-

cente

cente extremo circumduci, donec in primum ſitum revertatur. Ponamus Soli & Lunæ in eadem recta tellurem interponi. Quoniam nihil in his poſitionibus, aut conceptibus continetur ἀδύνατον aut ἀσύστατον, ergò hæ hypotheſes dicentur & concedi debent eſſe veræ. Eſtque earum veritas nihil aliud quàm connexio poſſibilis ſubjecti cum prædicato, quàm mente clarè percipimus; at quam non aliter forſan quàm exemplo ſimili vel experimento poſſumus comprobare; hoc eſt, ope principiorum, quæ modò diximus omnium primo de contradictoriis principio ſubjungenda videri. (id enim, id fortè ſolum, apprehendimus ut poſſibile, cui idem ſpecie, vel cui admodum ſimile quomodocunque experti ſumus extitiſſe). Similiter hypotheſis cujuſpiam falſitas nil videtur aliud, quàm conceptus & poſitio rei ceu effectæ vel exiſtentis, quæ nequit effici, vel exiſtere. Ut ſi quis ponat figuram rectilineam triangulam quadrangulam; aut corpus indiviſibile; aut hominem ſensûs ac rationis expertem; ſi quis quadratum fieri petat, aut ſuppunat exiſtere, diametrum obtinens lateri commenſurabilem; vel triangulum cujus duo latera exæquentur tertio; vel circulum, cujus peripheria ſit diametri quadrupla; cùm repugnet ejuſmodi res exiſtere; ſaltem cùm nihil his ſimile fuerit animo unquam noſtro obverſatum, vel repræſentatum ab experientia, repudiandæ ſunt ejuſmodi propoſitiones, nec in principiorum cenſum admittendæ.

E quibus obſervatis obiter conſectari videtur,

detur, quòd omnis demonſtratio, quò ſit efficaciter talis, quodammodo ſupponat exiſtentiam Dei; non tantum ex parte facultatis cognoſcentis, ſed etiam ex parte objecti ſcibilis. Optimè quidem notavit Carteſius, quò abſolutè certi ſimus veritatem nos attingere, requiri ut innoteſcat facultates noſtras veri apprehenſivas ac dijudicativas fore ſinceras; id quod non aliunde quàm ex conditoris noſtri potentiâ, bonitate, ſinceritate conſtare poſſe videtur. At verò quoniam principiorum indemonſtrabilium quoque veritas, ex parte objecti pendet à poſſibili rerum ſuppoſitarum exiſtentia, vel effectione; omnis autem poſſibilitas intrinſecè connotat reſpectum ad cauſam vel potentiam, quæ poteſt efficere, ut exiſtant quæ poſſibilia dicuntur, aut concipiuntur. Ergo demonſtratio ſupponit potentiam effectricem omnium, quæ ſub poſſibilium ratione concipimus & ſupponimus; hoc eſt, potentiam divinam immenſam & incomprehenſibilem, utpote quæ poteſt effecta dare, quæcunque nos concipere valemus ut poſſibilia; & ex paritate rationis alia prætereà innumera à nobis non comprehenſa. Supponit, inquam, omnis demonſtratio veras hypotheſes; veritas hypotheſis innuit rei, quæ ponitur, exiſtentiam poſſibilem; hæc poſſibilitas connotat effectricem rei cauſam; (aliàs impoſſibile foret eam exiſtere) effectrix omnium cauſa Deus eſt. Omnis igitur demonſtratio ſupponit exiſtentiam Dei. Sed hanc *ἐν παρόδῳ* ſuſceptam argumentationem ultrà perſequi non libet.

E dictis etiam ſequitur confici poſſe de-

demonſtrationes

monstrationes de rebus, quæ nunquam extiterunt, aut existent uspiam; quia nempe sufficit ad demonstrationem, ut hypotheses adsumantur veræ, hoc est quæ nullam implicant ἀσυστασίαν. Ex. gr. Existimat Galilæus se novam de motu scientiam condidisse, supponendo gravia naturaliter versus centrum terræ deferri motu uniformiter accelerato (hoc est, ità ut is à quiete recedens æqualibus continuò temporibus æqualia sibi celeritatis momenta superaddat) quod si falsum sit (utì non usquequaque verum arbitror pluribus de causis) istiusmodi dari motum in hac rerum natura, quia tamen, volente Deo, talis motus existere potest, utpote qui nil continet à possibilitate dissentaneum, ideò quæ ab ejus suppositione per illationem legitimam resultant conclusiones pro verè demonstratis haberi debent. Item, etsi quod supponunt Mechanici, puncta quævis corporum gravium premere, conari, vel ad motum propendere per rectas lineas sibi parallelas, horizonti perpendiculares, & proinde æqualia pondera ad æquales distantias æquiponderare, sit reverà naturæ disconveniens, eóque respectu falsum; tamen quia clarè concipi potest universum sic ordinari, ut corpora tales habeant propensiones, ideò conclusio tali hypothesi superstructa demonstrati theorematis dignitatem ac titulum tueri potest. Non secus, etsi quæ Ptolemæus, Copernicus, aliique passim Astronomi substernunt; astrorum motum in circulis peragi vel ellipsibus perfectis; & esse illos quomodocunque regulares vel æquabiles; item

item illos easdem perpetuâ constantiâ temporum periodos, itinerum orbitas conservare; aliáque talia, sint hujus naturæ (variabilis & in minoribus incertæ), horum syderum respectu, opinor, falsa, vel saltem incomperta; quia tamen nil impedit quò minus divinum numen ejusmodi mundum creare possit, in quo factis syderibus tales motus exquisitè conveniant, ideò verissimæ sunt istis hypothesibus innixæ demonstrationes; & eorum Astronomia vera est, non quidem hujus, sed alterius à Deo creabilis mundi: Nobis enim Deus potestatem indidit cogitatione nostrâ innumeros quasi creandi mundos imaginarios, quos ipse si velit reales potest efficere. Denique licèt nulli tales in rerum natura motus unquam reperti fuerint, qualibus lineas helices, quadratices, conchoides, cissoides, & consimiles alias supponunt descriptas Geometræ, nihilo tamen minùs, cùm facilè concipiamus nihil obstare quin tales dentur æquè ac alii multi non absimiles, quos indies experimur, ideò quæ ex illis suppositis consequuntur symptomata rectè demonstrantur. Siquidem rationis imperium naturæ cancellos longè transgreditur: Mundus intelligibilis immane quantum exporrectior & diffusior est mundo sensibili; multo plura mentis acies, quàm corporis sensus contemplatur.

Hujusmodi quæque scientia particularis hypotheses sibi producit, quæ non indigent aliâ probatione, quàm ut explicetur, & exemplo aliquo vel experimento notorio, discentis ad captum accommodato, commonstretur

monſtretur & quoad fieri poteſt evidens reddatur earum poſſibilitas; cui ſi præfractè nolit acquieſcere, nil ſupereſt, quàm ut abrumpatur doctrinæ commercium, & faceſſere jubeatur moroſus iſte, ceu propoſitæ ſcientiæ parùm οἰκεῖος ἀκροατής. E. g. Si quis abnuat conſentire, quòd figura quædam plana (quæ circulus dicatur) rectæ lineæ circumductu procreari poſſit, neque convinci velit, (obvio circini uſu, vel rotæ circa centrum revolutione, vel experimento conſimili) tale quid confici, concipíque poſſe, monendus eſt ut aliò conferat ſe, nec ut quicquam cum Geometris commiſceat negotii.

Porrò, conſtare quoque poterit ex his quid ſit, & qualem obtineat veritatem id genus principii, quod definitionis nomine venire ſolet. Nempe quòd ſit propoſitio nomen indicans alicujus rei, quæ reſultat ex aliquâ ſuppoſitione poſſibili. Ut exempli gratiâ (nam dicta ſtudeo quàm facillimis & precipuè familiaribus exemplis illuſtrare) ſi ponam tres in aliquo plano rectas lineas ità concurrere, ut ſpatium aliquod includant, ſeu figuram quandam conſtituant, incluſum ſpatium, ſeu figuram conſtitutam appello triangulum; fítque trianguli talis definitio, Triangulum eſt figura plana comprehenſa tribus rectis lineis concurrentibus; Si ponam, ſemicirculum circa ſuam baſim, vel diametrum quieſcentem revolvi donec in illum, quem, ab initio habuit ſitum reſtituatur, eóque rotatu productum corpus appellem ſphæram; erit indè ſphæræ definitio, corpus genitum ex ſemicirculi

circa diametrum unâ completâ revolutione. Si denique statuam inter solem & lunam collocari terram, ex quo positu lux Solis intercipiatur, & resultet obscuratio Lunæ, quam eclipsim voco; hinc emergit Eclipsis definitio, Obscuratio (vel privato lucis) in Luna, ob telluris interjectum. In quibus perspicere licet definitionis veritatem, quoad ejus subjectum, esse merè arbitrarium; illud enim est nomen merum contingenter & ex arbitrio impositum (scilicet à scientiæ præceptore pro suo jure confictum; vel ab usu vulgari desumptum; vel doctorum consensu adprobatum, vel utcunque nullatenus κτ φύσιν, ex suâ ipsius natura, sed omnino κτ θέσιν, ex hominum instituto significans rem definitam) quare non aliter demonstrari potest illud nomen convenire prædicato, quàm ad Lexicorum auctoritatem, ad popularem consuetudinem, ad doctorum suffragia provocando; vel certè, doctori cuivis in hoc competens, jus sibimet adrogando. At verò quoad prædicatum liquet ejus (definitionis inquam cujuspiam) veritatem ex dictæ hypotheseos, (quam includit) possibilitate dependere; sic, ut vera sit definitio, quæ nomen adsignat rei possibilem aliquam suppositionem, in ipsa expressam, consequenti (vel ab ea resultanti). Unde porro liquet definitiones ex sua natura non aliter esse demonstrabiles, quàm hypotheses ipsas, è quibus velut emergunt; hoc est quàm ostendendo nomen adaptari rei naturæ conditionem habenti satis manifestè possibilem, juxta quod superius inculcatum est. Nam certè rei incom-

Conf. Arist. Met XI. 7.

possibilis,

possibilis, vel repugnantiam implicantis, non est ulla propriè definitio, sicuti nec affectio. (Aristoteles; τὸ μὴ ὂν ὐδεὶς οἶδεν ὅτι ἐστὶν, ἀλλὰ τί μὲν σημαίνει ὁ λόγος, ἢ τὸ ὄνομα, ὅταν εἴπω τραγέλαφος· τί δ' ἐστὶ τραγέλαφος, ἀδύνατον εἰδέναι. Quid significet vocabulum hircocervus utcunque potest intelligi, sed nequit definiri, quia nec ejusmodi res existere possunt. Quod verò spectat ad reliquorum axiomatum veritatem, derivatur illa, sicut antehac insinuatum, ex definitionum antecedanearum veritate præsuppositâ, per legitimum ratiocinium. Ut v. g. quæ prostant in elementis axiomata: Omnes anguli recti sunt æquales inter se: Rectæ lineæ spatium non comprehendunt: Omnes è centro ad peripheriam circuli ductæ rectæ lineæ æquantur; ex anguli recti, æqualitatis, spatii comprehensi, circuli definitionibus ritè constitutis inferantur facilè; saltem inferri debent, ut axiomatum dignitatem jure tueantur. Imò quæ clarissima videntur ex se, nulliúsque non audientis suffragium promptissimè consequuntur, non dubito quin eodem modo, per celerrimum è definitionibus discursum colligantur. Quoniam verò suppositiones, è quibus istæ definitiones modo supradicto resultant, sunt omnium evidentissimè possibiles (utpote quotidianis innumeris obviis experimentis consentaneæ) suâque naturâ simplicissimæ, sic ut neminis aut observationem effugiant, aut captum exsuperent; quin & præterea axiomata ista non post longas ambages, at immediatè ex iis consectantur; indè fit ut ille quo comproban-

tur discursus evadat imperceptibilis, & quasi nullus; sicut usu venit, ut quæ facillimè fiunt, quomodo fiant non sentiatur. Quali pacto fit, ut apprimè dexter & peritus Musicæ vix ipse sibi videatur tam ex arte quapiam, quàm ex instinctu instrumentum pulsare; vix ut suæ rationis ipse motum, vix memoriæ exercitium persentiscat. Simili modo, v. g. quoniam quotidiè videmus magnitudines varias, quoad dimensiones omnimodas sibimet applicatas mutuò quadantenus congruere, vel idem spatium replere, vel inter eosdem terminos protendi, ideò facilè concedimus tale quid supponi; itémque cùm usu receptissimum sit, ut quæ ex ista suppositione resultat habitudo seu relatio magnitudinum ad se invicem dicatur æqualitas, indè nullo fere negotio deducimus, ac affirmanti consentimus, quòd quæcunque eidem magnitudini æquantur magnitudines, etiam sibi mutuò æquentur; propter dictæ nimirum hypothesis possibilitatem, & definitionis convenientiam continuò deprehensas. Itaque axiomata vel maxime perspicua vix aliter differunt ab aliis theorematis, quàm eo quòd ad primas & simplicissimas hypotheses ac definitiones accedunt propiùs, adeóque quòd breviùs & faciliùs demonstrantur.

E dictis innotescere queat omnis scientiæ naturalis origo, & genuina methodus à primis usque cognitionis fontibus ratiocinandi, quæ fermè tal s est. Mens ex observatione rerum objectarum occasionem arripit similes ideas compingendi, quas cùm clarè percipiat convenire rebus quæ possunt existere,

illas

illas affirmat & ſupponit, tum affingens & approprians eis vocabula, definitiones efformat; ex his quomodocunque verſatis, & comparatis inter ſe conſequentias elicit, & theoremata condit, è quibus in certa ſyſtemata coagmentatis conflantur particulares ſcientiæ.

Unde præterea conſequi videtur, quòd non opus ſit, ſaltem pro ſcientiis theoreticis (nam de practicis, morales præſertim intelligo, alia res eſt: Etenim harum principia non tam diſcurſu colligi, quàm ex appetitu vel inſtinctu naturali promanare videntur. E. g talia principia ſcientiæ moralis: Quicquid naturæ conveniens, innocuè gratum, utile, amabile eſt, amplectendum & perſequendum: Omne naturæ noxium, injucundum, incommodum (quod damnum, dolorem, perniciem affert) abominandum eſt & defugiendum; talia, inquam, axiomata non videntur ab aliquo ratiocinio dependere vel derivari, ſed eo modo cognoſci, quo à brutis etiam animantibus diſcernitur amaros ſapores, odores fœtidos, diſſonos ſtrepitus, horrida ſpectacula, reliqua ſenſibus ingrata fore devitanda, iiſque contraria amplectenda eſſe; de talibus igitur ſcientiis nil affirmamus; at de merè ſpeculativis ſcientiis obtendimus è dictis conſectari quòd non opus ſit) phyſicas aliquas προλήψεις, communes ἐννοίας, congenitas ſpecies ſupponere, cùm ipſa mens abſque illis ſufficienter inſtructa ſit, & nativâ polleat facultate neceſſaria ſibimet ad ſcientiam principia ac media conquirendi, modo jam expoſito. Non obſtinatè pernego

tales

tales notiones dari; sed eò proclivis sim ut existimem illas haud necessariò supponi; nedum ut hac de causa omnino oporteat Platonicas ullas ἀναμνήσεις, & nescio quas animæ dormitantis ἀνεγέρσεις confingere, vel comminisci.

Quinetiam non minùs hinc liquere videtur, quòd principiorum veritas non (ut censuisse videtur Aristoteles) inductione solâ (vel singularium observatione perpetuâ seu crebrâ) nitatur; cùm ad veram stabiliendam hypothesin, ad veram definitionem formandam, ad vera proinde principia constituenda vel unicum suffecerit experimentum, modò satis clarum & indubitatum. Aliquo fateor modo requiritur ad stabiliendum hypothesium veritatem sensûs sinceritas, ast universalitas observationis, aut frequentia non ità.

Post. II. 19.

Multa possem huc adjicere, sed hæc de principiorum natura generatim dicta sufficiant. Et sanè longiùs hæc extraxi quàm aut ipse cogitaveram, aut forte quàm oportuit, hoc est quàm arriserit vobis, meditatione me sensim provehente: Nec tamen prorsus inutiliter, ut spero, quum demonstrativas ambientibus scientias cum primis expediat ipsius demonstrationis naturam intimè pernovisse. Quare mihi condonetis obtestor hanc ἀδολεσχίαν, & non aliunde quàm ex attenta rei consideratione profecta vel hausta quæ dixi boni consulatis, & examinetis liberè, cautéque.

Confero me jam ad principiorum species distinguendas, hoc est ut quot sint inter se quasi specie diversa principia disquiram:

quiram: Quæ controversia licet è dictis facilè dirimi possit, operæ tamen pretium esse puto quid aliis visum referre; vos ut pensitatis omnium sententiis quid rationi sit magis consentaneum rectiùs dijudicetis. Ast patientiam vestram insultu primo nolim aggredi ferociùs, aut acriùs irritare, quapropter hanc disquisitionem & alia forsan quædam de principiis observatu non indigna rejiciam in sequentem lectionem.

L E C T. VIII.

DE principiorum naturâ, conditione, origine, veritate generalia nuperrimè quædam attigimus. Succedit ut de ipsorum numero, seu quot ipsorum distinctæ sint species, quid auctores tradant, quid ratio dictet & persuadeat eventilemus. Aristoteles cùm in hac materia subobscurus, varius & fere sibi discors videatur, ejus ut mentem vix penitus assequi liceat, eam tamen collatis locis expiscari nitemur, & proditam examinare. Capite secundo primi Post. Anal. tres constituit ἀρχὰς συλλογιστικὰς. Axiomata, hypotheses, definitiones. Nàm ipsas imprimis διχοτομεῖ in axiomata, & theses; tum theses in hypotheses & definitiones subdistinguit. Axiomatis naturam sic explicat, ut sit ἀρχὴ συλλογιστικὴ ἣν μὴ ἔστι δεῖξαι, καὶ ἀνάγκη ἔχειν τὸν ὁτιοῦν μαθησόμενον (tale principium syllogisticum quod non possit (aut quod non debeat)

debeat) demonſtrari, quódque neceſſariò debet habere (hoc eſt intelligere, admittere, agnoſcere) qui alicui diſciplinæ daturus eſt operam. Hypotheſin autem & definitionem, quatenus ſub generaliori theſis nomine continentur, definit conjunctim, *ἀρχὴν συλλογιστικὴν, ἣν μὴ ἔστι δεῖξαι, μηδ' ἀνάγκη ἔχειν τὸν μαθησόμενον*; hoc eſt, tale demonſtrationis principium quod itidem non poſſit (aut non debeat) oſtendi, quódque non eſt neceſſarium ut futurus diſcipulus in anteceſſum ſciat aut comprehendat. Quatenus autem hæ diſtinguuntur à ſe invicem, hypotheſin finit eſſe theſin, quæ ſumit aliquid eſſe vel non eſſe (ut eſſe magnitudinem, dari unitatem). Definitionem verò pronunciat eſſe theſin, quæ ſumitur quid ſit aliquid. Ut quòd unitas ſit *ποσὸν ἀδιαίρετον* (quantum vel quotum indiviſum). Capite verò decimo ejuſdem tractatûs, principiorum alia tria genera ſtatuere videtur, axiomata communia, hypotheſes, & poſtulata. Et hypotheſes quidem à poſtulatis ità ſecernit. *Ὅσα μὲν δεικτὰ ὄντα λαμβάνει αὐτὸς μὴ δείξας ταῦτα, ἐὰν μὲν δοκοῦντα λαμβάνει τῷ μανθάνοντι, ὑποτίθεται, καὶ ἔστιν οὐχ ἁπλῶς ὑπόθεσις, ἀλλὰ πρὸς ἐκεῖνον μόνον· ἐὰν δὲ ἢ μηδεμιᾶς ἐνούσης δόξης, ἢ καὶ ἐναντίας ἐνούσης λαμβάνῃ, τὸ αὐτὸ αἰτεῖται· καὶ τούτῳ διαφέρει ὑπόθεσις καὶ αἴτημα· ἔστι γὰρ αἴτημα τὸ ὑπεναντίον τοῦ μανθάνοντος τῇ δόξῃ· ἢ ὃ ἄν τις ἀποδεικτὸν ὂν λαμβάνῃ καὶ χρῆται μὴ δείξας.* Hoc eſt, quæcunque cùm probari poſſint, ſumit demonſtrator abſque probatione, ſi hæc diſcentis opinioni conſentanea ſunt, ſupponit,

nec

nec eſt ſimpliciter hypotheſis, ſed ejus ſolius reſpectu; quòd ſi nulla inſit, vel etiam contraria inſit opinio, tali caſu aſſumpta poſtulat. Ac hoc differunt hypotheſis & poſtulatum. Eſt enim poſtulatum id quod diſcentis notioni ſubcontrariatur; vel quod quis cùm demonſtrabile ſit, accipit ac adhibet minimè demonſtrans. Ità quidem ex horum collatione, omnino principiorum quinque videantur eſſe genera, ex philoſophi ſententia: Axiomata, ſuppoſitiones indemonſtrabiles, definitiones, ſuppoſitiones demonſtrabiles, & poſtulata. Sed in ſpeciem adverſantur priori loco dicta illis, quæ tradit in poſteriori. Illic enim principia ſtatuere videtur abſolutè μὴ δεικτὰ, nam theſin definit, ἣν μὴ ἔστι δεῖξαι; hîc autem hypotheſes adſumptas, & poſtulata diſertè pronunciat ἀποδεικτά. Quibus conciliandis dici poſſit philoſophum priore loco principia ſimpliciter omnis ſcientiæ prima reſpicere, quæ certè demonſtrari nefas eſt (alioquin prima non forent) poſteriore verò ad peculiaria ſubjectarum ſcientiarum principia digitum intendere, quæ nil obſtat quin poſſint demonſtrari (ſicut à nobis in præcedentibus oſtenſum eſt) vel certè vult principia quævis, in illa ubi ceu talia adhibentur ſcientia probationem non deſiderare, nec admittere, quamvis in alia demonſtrari poſſint, ac debeant.

Verùm in hac Ariſtotelica recenſione principiorum, & eorum explicatione (quod honore ſalvo dictum velim divini viri, quem ſiquis alius, ob profundiſſimam ſapientiam, & diffuſiſſimam eruditionem ſummopere vene-

veneror ac suspicio, omnibúsque commendatum velim) nonnulla minùs arrident. Prima quidem τριχοτομία (in hypotheses, definitiones, axiomata) quod ipsa divisionis attinet membra, generalim & cujusvis scientiæ respectu, mihi videtur omnium rectissimè constituta; quoad explicationem secùs videtur. Nam per hypothesin exemplis suis indicat se nil aliud intelligere, quàm subjecti (de quo agitur in aliqua scientia vel demonstratione) positionem seu assertionem quòd sit. Veluti quòd detur unitas, quòd existat magnitudo (δεῖ, in-
I. Post. 10. quit alicubi, δεῖ εἶναι τὴν μονάδα λαβεῖν καὶ τὸ μέγεθος, τὰ δ' ἕτερα δεικνῦναι). Atqui talis hypothesis prorsus inepta videtur ad scientiam, cùm ex ea nil possit inferri, nec ea soleat ullum ingredi syllogismum. Ex eo nempe quòd sit, quòd detur, quòd existat aut existere possit magnitudo, quid ex se consequi potest, quæ potest indè quæso derivari conclusio? Planè nulla, reor. At ex eò quòd talis sit, quod tali prædita symptomate, quòd talem situm, talem motum obtineat consequi potest (aliis eò adscitis & collatis) alia ei obtingere symptomata cum istis connexa. Itaque prædicta suppositio non rite statuitur demonstrationis principium. Est enim de ratione talis principii, ut aptum natum sit aliquam ex se quasi conclusionem progignere, alterius propositionis utcunque probatioris deservire ac conducere. Ex nudâ verò positione subjecti quòd sit nil aliud sequatur quàm ipsum esse, scilicet ità nugando, est, ergo est. Equidem, fateor, antecedenter ad

omnium

omnium scientiam quodammodo præcognoscitur & præsupponitur subjecti cognitio, vel conceptio quædam, quatenus omnis propositio conflatur ex terminis incomplexis, qui non aliter apprehendi possint quàm ut rerum significativi qualemcunque habentium essentiam, hoc est quàm concipiendo vel supponendo quòd sint; sed non ideò termini incomplexi τὸ ὅτι implicantes sunt principia demonstrationum, sed materia potiùs vel partes ipsorum integrales.

Etiam illud vehementer improbo, quòd affirmet Aristoteles definitionem nihil affirmare, vel accipere neutram partem contradictionis; hoc est, quòd sumat definitionem non pro integra enunciatione, sed tantùm pro ejus prædicato; ut v. g. quòd animal rationale sit definitio hominis, eâque ratione principium demonstrationis; non autem hæc enunciatio; homo est animal rationale. At enim, quomodò non adversatur hoc ab ipso præstitutæ definitioni principii, quòd nempe sit πρότασις ἄμεσος; quomodò non repugnat principii naturæ ac qualitati, quæ requirit ut sit verum, taliter verum ut ex eo possint alia vera deduci? (Cúm nempe veritas sit qualitas enunciationis perfectæ, non simplicis termini, nec ex hujus apprehensione quicquam eliciatur.) Quare definitio nominatur ab ipso thesis quædam, si nil ponit aut asserit? Quo denique pacto fiet, ut non perperam & perabsurdè hoc modo sumpta definitio cum axiomatis (quæ sunt enunciationes perfectæ) cum hypothesibus, quæ ipso docente aliquid asserunt, in ratione prin-

principii comparentur, conjungantur, conveniant? Reverà definitio, quæ demonstrationis habetur principium, est enunciatio completa, de subjecto proposito prædicans aliquam ipsius affectionem, utilem aliis educendis passionibus. Est, inquam, syllogismi apodictici propositio quædam præcipua, causam quatenus fieri potest, ostendens symptomatis demonstrati. Definitio quidem incomplexa (vel prædicatum definitionis complexæ) poterit esse, sæpissimè est, medium vel argumentum extruendæ demonstrationi repertum, delectúmque; sed non ideò principium est, non magis quàm totum & pars sunt ideò demonstrationis principia, quia pronunciatum illud, Totum est parte majus, principiis accensetur. Taceo quòd non usquequaque verum sit, axiomata non posse demonstrari (ἃ μὴ ἔστι δεῖξαι) quia philosophi verba, sicut antehac insinuatum, aliquam admittunt excusationem & propositionem commodam. De aliis verò duobus, quæ subjungit, principiorum generibus, quæ demonstrator assumit, alioquin demonstrabilia, hypothesibus nimirum & postulatis, illa sentio nequicquam ab axiomatis differre. Quicquid enim demonstrari potest, est theorema; theorema vero quod in aliqua particulari scientia non probatur, at ex aliquà superiore desumitur, axiomatis obtinet locum in ista. Cæterùm distinctionis, quam apponit Aristoteles hypothesin inter & postulatum (quòd illi sc. haud illibenter adstipuletur auditor, huic verò dissentiat) perquam exile video fundamentum. Nam

utcunque

utcunque ſit de præconceptis auditoris opinionibus, quæ nihil admodum refert quales fuerint, docentis menti conſonæ vel diſcrepantes) priuſquam ad demonſtrationem efficacem deſcendatur, neceſſarium eſt ut adhibitis quibuſque principiis adſenſum præſtet, alioquin nullam ſibi perſentiſcet ingenitam ſcientiam. Contingere poteſt, at quid hoc ad ſcientiæ propoſitum? Ut diſcipulus habuerit præjudicia: Illa certè, ſiqua habuit, exuere debet ac deponere magiſtri ratiociniis convictus, aut luculentis rei propoſitæ exemplis illuſtratus, antequam perfectam, abſolutam & propriè dictam ſcientiam queat indipiſci. Qualis enim, obteſtor, futura eſt demonſtrationis energia, quis effectus, ſi diſcipulus non annuat, non acquieſcat, non mordicus adhæreſcat præmiſſis? Nè dicam quomodò rectè dici poſſit αἴτημα, quod poteſt demonſtrari. Cur enim accipiat precariò, quod jure poteſt aſſumere, quod vi valet extorquere? Vel cur non ignavis præceptoris precibus repugnet ὁ μανθανόμενος; quare non perſpicio quid philoſophum ad hanc adduxerit diſtinctionem; nec ſcrupulum eximunt interpretes. Proclum quod attinet (nam in eum jam aciem diſtringo) dum is Ariſtotelem ſequi profitetur, pejora meo judicio reddit omnia. Nam primò tribuit Euclidi tria genera principiorum, axiomata, hypotheſes, poſtulata, quorum differentias exponit ex Ariſtotelis ſententia: Quaſi verò definitiones non ſint principia, vel eas non agnoverit Euclides, vel Ariſtoteles eas nunquam accenſuerit principiis, diſſertiſſiméque

N ſecre-

secreverit & contradistinxerit ab hypothesibus. Itaque mira Procli videtur ἀβλεψία definitiones, in principiorum enumeratione, vel omittentis omnino, vel cum Aristotelicis hypothesibus confundentis; tum quæ suis demonstrabilibus hypothesibus ac postulatis ascribit Aristoteles, ea Proclus attribuit definitionibus, & postulatis Euclideis, admodum incongruè. Nam quomodo Euclideæ definitiones, quomodo postulata Geometrica sunt δεικτά? Quomodo requiritur, ut postulatis Euclideis discipuli sententia refragetur, aut eis verè adaptari possit illud, μὴ συγχωροῦντος τοῦ μανθάνοντος, ὅμως λαμβάνεται; quasi velit nolit ἀκροατὴς, quantumvis reclamet atque repugnet, ea tamen Geometra confidenter arripiat. Quid hoc est aliud quàm Geometriæ fundamenta convellere; quàm omnis disciplinæ commercium disturbare? Imò potius Euclidea postulata tam perspicuam præ se possibilitatem ferunt, tam familiaribus & crebris exemplis possunt illustrari, non possit ut illis scientiæ capax ingenium ullatenus obsistere vel obmurmurare; immodestus alioquin, importunus, ineptus foret scientiæ doctor, qui postularet aut supponeret; frustraque pergeret in docendo, vel demonstrando non admissis suis postulatis. Sed quid Proclum oppugno, cùm ipse se jugulat, & quas libro secundo ab Aristotele propinatas crudas notiones ingesserat, eas tertii initio removere videatur? Nam δεῖ δὴ πανταχοῦ τὰς ἀρχὰς τῶν μετ' τὰς ἀρχὰς διαφέρειν τῇ ἁπλότητι, τῷ ἀναποδείκτῳ, τῷ αὐτοπίστῳ, inquit, alia pleraque sub-

ſubnectens in eandem mentem clarè repugnantia prius adſtructis, & Ariſtotelicæ, cui ſuffragari videtur, poſtulatorum deſcriptioni. Sed ut Proclum dimittamus, quid ad hæc Ramus? Arguit Procli diſtinctionem; at quomodo? Sic ut omne ſublatum eat principiorum diſcrimen, inſigni profectò moroſitate. Quibus autem fretus argumentis? *Quoniam*, ait, *definitiones, diviſiones, & propoſitiones quævis aliæ per ſe manifeſtæ admittuntur in diſciplinis, non poſtulati vel axiomatis, ſed ipſo tantùm ſuæ claritatis & perſpicuitatis nomine.* Quot verba; tot ferè ſubſunt paralogiſmi. Quis definitiones in aliqua diſciplina credidit admittendas poſtulati vel axiomatis nomine? Quis accuratè tractans aliquam ſcientiam non definitiones ſeparavit ab axiomatis? Ac etſi nemo diſtinxiſſet, non ideò poſſent diſtingui? Quò ipſius igitur tot novellæ diſtinctiunculæ? Verùm admittuntur ſolo claritatis ſuæ nomine, hoc eſt, opinor, non quatenus definitiones aut axiomata, ſed quia clara: Eſto. Quid inde? Ergò non debent diſtingui: Bella conſequentia, perſimilis huic, Sol & lampas conſpiciuntur, non ſolis & lampadis nomine, ſed quia clarè lucent; ergò, Sol & lampas diſtingui non debent; vel ergò non eſt alia lux ſolis, alia lampadis. At porrò diſputat, ab Euclide adhibetur id diſcrimen tantùm in primo libro, in cæteris poſteà libris contempta eſt iſta principiorum differentia: Contempta eſt; unde conſtat? Certè definitiones alias, alia axiomata ſubjicit alibi locis opportunis; plura poſtulata non addit,

Sch. Math. lib. 3.

quia nullis aliis opus videbatur: Sed ubi confundit istas species principiorum, ubi præ se fert ullas contemnere? Nisi postulata non ἀκαίρως nominare sit illa contemnere. Sed fortiùs instat Archimedis gravissimam authoritatem objectando; qui isorrhophicis suis præstrata principia promiscuè vocat αἰτήματα. Αἰτούμεθα, dicit, τὰ ἰσοβαρέα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων ἰσοῤῥοπεῖν (nec absimiliter Euclides in Opticis quælibet adsumpta principia nuncupat hypotheses). De Archimede subnotarat idem jam olim Geminus apud Proclum & Eutocium; cui instantiæ respondeo, forsan Archimedem, brevitati studentem, & nè nimium exiguo libello apparatum præstrueret, extremam ἀκρίβειαν consultò neglexisse; quam tamen in libris de sphæra & cylindro, de spiralibus, & aliis curiosiùs pertextis observavit, definitiones ab axiomatis sejungens. Nec adeò mirum est eadem vocabula nunc angustiùs stringi, nunc extendi latiùs pro scriptoris ingenio, vel proposito. Sicut Stoici, insignes illi rerum pariter ac vocabulorum quasi libellatores, enunciationes universas axiomatum titulo donârunt; quasi prout virtutes & vitia, sic & propositiones omnes sibi dignitate vellent exæquare. Nec diffiteor alioquin petitionis vocabulum, ex significatu vulgari, satis accommodatè tribui principiis omnimodis. Nam quoniam utcunque debet impetrari discentis consensus, docens quodammodò petit. Verecundius id certè quàm si dicatur præcipere, veluti subinde disciplinarum magistri dictata sua vocitant præcepta. Non malè Rivaltus ad istum locum Archimedis.

Petere

Petere possumus hoc vel illud sic appellari, tum hoc vel illud quod naturæ lumine cognoscimus ratum statui, denique hoc vel illud possibile fieri. At omne quod fieri vel sic nominari potest dignitatem appellare nequimus, nec innatam mentibus nostris cognitionem definitionem esse concedetur. Satis hoc ad rem apposite. Addo Proclum: Ἤδη οἱ μὲν πάντα αἰτήματα καλεῖν ἀξιοῦσιν, ὥσπερ καὶ προβλήματα τὰ ζητούμενα πάντα. Potuit igitur Archimedes, brevitati dans operam, ideóque principia sua simul uno corpore complecti volens petitionum illis nomen assignare non incommode; non æquè potuisset eis omnibus definitionum aut axiomatum titulum adaptare. Simili jure potuit Euclides, possent alii suis principiis indere nomen hypothesium. Nam & vocabulum supponere latissimæ capax est acceptionis. Nec improprie quicquid ad demonstrationem utile præmittitur dici potest ὑποκεῖσθαι, vel ὑποτίθεσθαι, subjacere, supponi, substerni instar fundamenti, cui superextruantur sequuturæ demonstrationes. Archimedi solenne est ita loqui. Ante libros de sphæra & cylindro, post definitiones & axiomata, τούτων, inquit, ὑποκειμένων. Ante definitiones præmissas libro de conoidibus, & sphæroidibus. Ὑποκείσθω τάδε. In libro de spiralibus, προκείσθω τὰ χρείαν ἔχοντα εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτῶν (ubi προκεῖσθαι æquipollet τῷ ὑποκεῖσθαι). Itaque supponere designat universim præmittere vel præsternere, fundamenti loco; quâ ratione cunctis congruit principiis. Sicut & λαμβάνειν, assumere, vel pro concesso accipere; licèt hoc axiomatis peculiariùs

accommodetur: Ut in iis de ſphæra & cylindro, poſt traditas definitiones axiomata ſubjecturus Archimedes, λαμβάνω δὲ ταῦτα. Non reticebo, in tranſcurſu, paullò ſuprà memoratum Archimedis Scholiaſten, Rivaltum, novum nobis ex eo principii genus, aut novum certè nomen extudiſſe, quod appellat ſubſidium. Dixerat Archimedes poſt definitiones, alia demonſtrationibus ſuis præmiſſa, προγράψαντες οὖν τάτε θεωρήματα, καὶ τὰ ἐπιτάγματα τὰ χρείαν ἔχοντα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν, μετὰ ταῦτα γράψουμεν σοὶ τὰ προβλήματα. Hinc Rivaltus ἐπιτάγματα ſubſidia interpretans, ſubſidii nomen imponit definitionibus quibuſdam, quæ ut opinor loco ſuo exciderant. Sed Archimedes per ἐπιτάγματα nil aliud intelligere videtur, quàm propoſitiones quaſdam lemmaticas in libri ſequentis decurſu exhibitas, ad primariorum theorematum demonſtrationem requiſitas; ei igitur τὰ ἐπιτάγματα ſunt quæ ordine ſequuntur vel inſeruntur propoſitiones, ad illarum inſtar cohortium, quas hiſtoriæ Romanæ ſcriptores ἐπιτάγματα, cohortes ſubſidiarias, ſolent appellare. Quanquam ferè ſuſpicor Archimedem ejuſmodi vocabulo non uſum, ſed exſcriptorum forſan incuria irrepſiſſe ἐπιτάγματα, pro ἐπὶ ταῦτα· τὰ ἐπὶ ταῦτα χρείαν ἔχοντα εἰς ἀποδείξεις, quæ præterea ſubjiciuntur ad demonſtrationem utilia. Quanquam non diffiteor epitagmatis nomen, hujuſmodi rebus appoſitum, etiam alicubi apud Pappum extare; ſic tamen ut quomodo ſit accipiendum vix ex contextu liceat divinare. Sed hæc ἐν παρόδῳ. Et ſane

In libr. de Conoid. & Sphæroid.

Lib. 7. p. 244.

ſanè vereor ut vos minùs delectent hæ velitatoriæ σκιαμαχίαι, hæ tricæ, hæ cuminiſectiones, me certè tædet ipſarum, nec ſine quadam animi moleſtia, dum aliqualem conſector ἀκρίβειαν, in quandam ἀπεραντολογίαν delapſus ſentio. Ut hâc quæſtione memet expediam ocyùs, reliquas prætermittens aliorum ſententias, de reipſa ſic ſtatuo breviter & conſentienter antedictis. Principiorum ſimpliciter ità dictorum, hoc eſt indemonſtrabilium quæ in nulla quapiam ſcientia demonſtrari poſſunt, aut debent, duo ſunt genera, Hypotheſes (vel Poſtulata), & Definitiones.

Hypotheſes ſunt propoſitiones, alicujus rei modum aliquem, actionem, aut motum evidenter poſſibilem aſſumentes, vel affirmantes. E. g. Ponatur punctum aliquod à loco A ad locum B ferri motu directo & indeflexo. Vel, Punctum ità ferri poteſt. Ponatur recta linea circa unum extremum defixum (vel immotum) rotari, donec in primum ſitum revolvatur. Vel recta linea tali pacto rotari poteſt. Ponantur duæ rectæ lineæ concurrere, vel interſecare ſe invicem, ſic ut poſt occurſum abeant in partes diverſas. Vel duæ rectæ poſſunt ità concurrere. Ponatur triangulum rectangulum circa crus unum anguli recti completè revolvi. Ponatur recta linea A B quieſcente extremo A rotari uniformiter (hoc eſt ità ut æqualibus temporibus æquales conficiat angulos) & eodem tempore punctum A ferri uniformiter in recta A B (hoc eſt ut æquis temporibus æqua decurrat intervalla) ponatur

A ——— B

natur aliquod punctum in circuli vel ellipsis peripheria circumire, sic ut æquis temporibus pares efficiat angulos respectu designati puncti, quod sit puta centrum circuli, vel focus ellipseos. Ponatur à corporis lucidi vel illustrati puncto quodam ad oculum lineam rectam protendi. Ponatur lunam in recta collocari, quæ solem inter & oculum porrigitur, linea. Ponatur à puncto visibili per centrum oculi, vel ad centrum tunicæ retinæ radium derivari. Hujusmodi positiones quòd non assumantur temerè, quòd admitti debeant, hoc est quòd nihil continent possibilitati repugnans, sensus ipse commonstrat, experientia clarè contestatur. (Unde obiter liquet, quòd à veteribus Geometris est animadversum, sicut inter axiomata & theoremata, ità hypotheses inter & problemata admodum propinquam affinitatem versari. Prout enim problema structuræ cujusdam modum edocet, & possibilitatem demonstrat, sic hypothesis constructionem aliquam adsumit clarè possibilem. Eò scitè Proclus, ex Gemini sententia; διέστηκεν δὲ ὁμοίως ὥσπερ πρόβλημα θεωρήματος, οὕτω καὶ αἴτημα ἀξιώματος, εἰ καὶ ἀμφότερα ἀναπόδεικτα ἐστὶ, καὶ τὸ μὲν ὡς εὐπόριστον λαμβάνει, τὸ δὲ ὡς εὔγνωστον ὁμολογεῖ). h. e. In postulato, vel hypothesi, tanquam in problemate, quid facilè factibile adsumitur; in axiomate, ceu theoremate, quid facilè cognoscibile conceditur). Definitio autem est propositio, in quâ nomen imponitur vel adscribitur rei clarè resultantis ex aliqua possibili suppositione; quæ scilicet in ipsa propositione expressa nomen

illud

illud determinat ac circumſcribit. Veluti prædictis ſuppoſitionibus inſiſtendo; quod reſultat ex concurſu duarum rectarum linearum ſe interſectantium dicatur angulus rectilineus, vel angulus rectilineus eſt, qui fit ex tali concurſu. Quæ producitur ex rotatu lineæ rectæ figura plana dicatur circulus: Vel, Circulus eſt figura plana, quæ lineæ rectæ circumductu producitur. Quod provenit ex trianguli rectanguli circa crus unum anguli recti revolutione ſolidum, appelletur conus rectus. Vel, Conus rectus eſt corpus tali revolutione procreatum. Quæ fit ex duobus motibus uniformibus, recto & circulari, linea curva dicatur Helix; vel Helix eſt linea curva tali motuum compoſitione generata. Motus in peripheria circuli vel ellipſis, æquales reſpectu deſignati puncti conficiens angulos vocitetur motus medius; vel medius eſt, qui taliter afficitur motus.

A corporis lucidi, vel illuſtrati puncto verſus oculum protenſa recta nuncupetur radius. Quæ fit ab interpoſitu lunæ privatio lucis apparentis dicatur eclipſis Solis. A puncto viſibili per centrum oculi, vel ad centrum retinæ manans radius dicatur axis opticus. Quibus exemplis affatim patet, qualis ſit definitionis natura, quæ origo: Quódque in ipſâ reciprocè conveniant rei nomen, & nomini res; ſeu quòd hujus ſignificatio illius exiſtentiæ poſſibili adæquetur.

Ex hiſce duobus per ſyllogiſticam conſequentiam emergit tertium genus principii, quod vocari ſolet axioma vel dignitas, pro-

pronunciatum, communis notio, prolepsis (vel anticipatio). Hoc autem nihil est aliud quam theorema quoddam in aliqua superiore præcedanea scientia perspicuè deductum & demonstratum à propriis definitionibus & hypothesibus istius scientiæ vel immediate, vel per alia intermedia theoremata; adsumptúmque proinde sine probatione in scientia subordinata; vel saltem quod emergit ex hypothesi seu definitione quapiam in eadem ipsa scientia posita, consectarii ad modum per facillimam & evidentissimam consequentiam. Quæ axiomatis species propria dici solet isti peculiari scientiæ, sicut altera vocitatur communis; nimirum communis omnibus dictæ primariæ subjectis scientiis. E. g. Quæ eidem æqualia sibimet æquantur, commune censetur axioma, quoniam numeris, temporibus, motibus, ponderibus juxta convenit ac magnitudinibus; & in sola prima philosophia demonstratur, conclusionis ibidem seu theorematis rationem habens: Sed, omnes anguli recti sunt æquales; duæ rectæ lineæ spatium non continent, sunt axiomata propria, utpote quæ in sola Geometria primò locum obtinent, inque ea ex definitionibus recti anguli, & rectæ lineæ consectantur, & quodammodo demonstrantur. Sed hæc satis anteà luculentè prolatis exemplis exposuimus.

Ita demum quoad principiorum numerum prorsus accedimus Aristotelis primæ divisioni, in secundo capite primi Posteriorum exhibitæ, in hypotheses, definitiones, axiomata, licet eorum minùs accuratam, saltem

ſaltem minùs liquidam expoſitionem improbemus. Accedimus quoque στοιχειωτῇ noſtro, itidem principia in tres claſſes diſpertienti, definitiones, poſtulata, pronunciata. Siquidem perinde eſt an ſuppoſitiones indemonſtrabiles dicantur hypotheſes an poſtulata; modò non ideò credantur dici poſtulata quòd illa demonſtrator accipiat precariò, & quaſi emendicet: Habent enim irrefragabilem ipſa certitudinem, ac evidentiam axiomatum claritati nulla ex parte cedentem; imò multis axiomatis clariora videntur, utpote cùm hæc ex illis dependeant & deriventur. Poſſent etiam axiomatum formam induere, ſicut & problemata theorematum; nec ferè differunt ab iis, niſi quoad formam, & quia nequeunt, ut illa, demonſtrari. Utcunque modeſtia nominis rei præſtantiæ non debet detrahere.

Animadvertatur autem, id quod dictis objici poteſt, duas ab Euclide propoſitiones poſtulatis accenſeri, quibus allata poſtulati vel hypotheſis explicatio minimè convenit; illas nempe, Rectos omnes angulos invicem æquari, & ſi linea recta duabus aliis rectis inſiſtens angulos ad eaſdem inſiſtentis partes internos duobus rectis minores effecerit, illas duas rectas aliquando, ad iſtas partes productas, concurrere. Reſpondeo minùs id accuratè factum ab elementorum digeſtore (ſi quidem ab illo revera factum, nec in alienum locum iſtæ propoſitiones irrepſerint, aliorum culpâ) rectiúſque proinde à Gemino, Proclo, & aliis pleríſque interpretibus eas axiomatis annu-

annumerari; ſunt enim reverà theoremata, recti anguli, lineæque parallelæ definitiones conſectantia.

Poſtquam hæc de principiis eorúmque partitione concepiſſem animo, chartæque commendâſſem, fortè conjiciens oculos in excellentiſſimi Geometræ Alphonſi Borelli librum perelegantem & perutilem, elementa Geometriæ novà methodo digeſta complectentem, cui nomen fecit Euclides reſtitutus, illum adverti principiorum naturæ & diſtinctioni elucidandis ſummam quam potuit curam, & ſubtilitatem impendiſſe, cùm in procemio operis, tum præſertim in iis quæ primæ elementorum propoſitioni immediatè præpoſita ſunt. In ejus aliqua dicta, ſi priùs obtuliſſent ſe, forſan nonnihil annotâſſem, ſed quum nihil ferè contineant, quod acceptum commodè diſſideat à noſtris cogitatis, & quod ipſe non aliquando perſtrinxerim, cùmque ſatis ſuperque fuerit in hac re diſputatum, impræſentiarum intacta præteribo, poſtea tamen cùm objecta fuerit opportunitas, unum fortaſſis, aut alterum punctum diſcuſſurus, ea præcipuè quibus Clavianam de definitionis natura ſententiam impugnare videtur. Confero me jam ad ſpecialia quædam de poſtulatis (vel hypotheſibus) definitionibus, & axiomatis obſervanda.

Quoad hypotheſes obſervari poteſt generatim earum cùm fundamentum ſeu ratio, tum materies & extenſio. Fundamentum & ratio hypotheſium (ſicut innuimus ſæpiùs, nam effugere non poſſumus quamvis inviti quin eadem ſubinde repetamus, quod

ſane

ſanè non abhorret ab hujuſmodi lectionum ingenio, & aliquatenus prodeſſe poteſt, cùm ex eo dictorum ſenſus, menſque dicentis eluceſcant clariùs & altiùs inſigantur) hypotheſium, inquam, fundamentum eſt evidens experientia, ſeu per ſenſum aliquem quo forinſecus oblata percipimus, ſive per conſcientiam intimam, quâ motus internos, & immanentes nobis actiones perſentimus. Nihil enim ſupponi debet, cujus nullum experimentum edere, quod non appoſito aliquo exemplo confirmare valemus, aut illuſtrare. Cùm non aliâ ratione poſſit hypotheſis poſſibilitas oſtendi, de qua tamen certò conſtare debet auditori, ſcientiam ambienti. E. g. Hypotheſis optica, quòd à quovis objecti viſibilis puncto (phyſico ſaltem) recta linea luminoſa, ſeu radius ad oculum ubicunque ſitum (in medio ſcilicet homogeneo) porrigatur, non aliter eſſet admittendum, niſi fulciri poſſet ejuſmodi notorio experimento, quòd ubique objectum aſpicitur, niſi corpus opacum alicubi in recta, illud inter & aſpectum linea collocatum impediat; incredibile videretur illud, & fere impoſſibile (propter imperveſtigabilem modi quo fit intelligentiam, & imperceptibilem naturæ ſubtilitatem) niſi planè fidem facere experientia. Ità ſiquid hypotheſis loco tradatur auditori minus probabile, minimè exploratum, tenetur id ſcientiæ choragus aliquo luculento paradigmate ſeu phænomeno commonſtrare (τῇ αἰσθήσει, ἢ τῷ δακτύλῳ, ut ait Ariſtoteles) ſic ut antequam ulteriùs ad demonſtrationes procedatur, nulla *Poſt.II.7.*

ſuperſit hæſitatio de rei ſuppoſitæ poſſibilitate, ſeu veritate.

Materia verò hypotheſium eſt omnis actio, vel motus, vel modus entis, qui ſub obſervationem cadit, aut experientiâ poteſt deprehendi. Speciatim Mathematicarum, quas præſertim reſpicimus, hypotheſium materies ad omnia magnitudinis obvia cuivis ſenſui ſymptomata diſtenditur. Quamobrem ut hypotheſium Mathematicarum materia rectè comprehendatur, debent generales, quarum omnis magnitudo capax eſt affectiones ſtudiosè penſitari. Quare de iis jam opportunum erit diſſerere.

Magnitudinis quænam primaria notio ſit, & maximè eſſentialis proprietas, à qua reliquæ dimanant, à quibuſdam anxiè diſquiritur; inani forſan opera, & ſine fundamento, cùm fortè nulla ſit (meo certè judicio nulla eſt) cui talis prærogativa naturæ, talis ordinis primatus reverà competat; at multæ ſunt ejus proprietates ei pari jure, ſimili nexu congruentes, arctiſſimo vinculo cohærentes, implicitæ, adunatæ tùm illi, tùm ſibimet invicem. Quare de ipſarum ordine parùm ſolicitus primarias ejus affectiones potiſſimùm obſervabiles, quæque Mathematicis materiam ſuppediant hypotheſibus, ſtrictim atque χύδην recenſebo, conſiderabo, conabor explicare. Verùm ſentio me negotium aggredi fuſiori dignum expoſitione, quàm ut tribus verbis poſſit abſolvi; quódque malim non incipere, quàm ſtatim abrumpere; cúmque memor ſim,

toties

toties expertus, quanto brevitati nimiæ paratior ſit, quàm prolixitati venia, quantóque præſtet non explere deſiderium, quam creare faſtidium auditoribus, in ſequentes iſta lectiones reſervabo.

Μόνῳ τῷ σοφῷ Θεῷ δόξα. Ἀμήν.

FINIS.
